① ה׳ היחידות

טענה L/K לא מסועפת אז $H^n(G,U_L)=1$ לכל n.

הוכחה G ציקלית ולכן H^n מחזורית והראינו $h(G,U_L)=1$. לכן די להוכיח $H^{-1}(G,U_L)=1$. אבל זה שווה $\frac{{}_N U_L}{(\varphi-1)U_L}$, φ יוצר, א.ז. $\varphi_{L/K}$.

יהי π ראשוני של $K \Rightarrow$ ראשוני של L. יהי $x\in U_L$ כך ש- $N_{L/K}x=1$.

אז לפי משפט הילברט קיים $y\in L^*$ כך ש- $x=\frac{\varphi y}{y}$ וצריך $y\in U_L$.

לכן נפרק $y=\pi^n u$ ל- $u\in U_L$, ואז $x=\frac{\varphi y}{y}=\frac{\varphi u}{u}=(\varphi-1)u$

כי $\pi\in K$, ולכן $H^1(G,U_L)=1$.

מסקנות:

א) תהי L/K לא מסועפת. אז כל יחידה של K היא נורמה – $N_{L/K}U_L=U_K$

כי $1=\frac{U_K}{N_{L/K}U_L}=\frac{U_L^G}{N_{L/K}U_L}=H^0(G,U_L)$.

ב) משפט $H^0(L/K)=\frac{K^*}{N_{L/K}L^*}$ ציקלית מסדר $[L:K]$ עם יוצר $\pi(N_{L/K}L^*)$.

הוכחה ראינו $K^*=\langle\pi\rangle\times U_K$, $L^*=\langle\pi\rangle\times U_L$ ומעברית (א) נקבל

$N_{L/K}L^*=\langle\pi^{[L:K]}\rangle N_{L/K}U_L=\langle\pi^{[L:K]}\rangle U_K$ ולכן המנה $\cong\frac{\mathbb{Z}}{[L:K]\mathbb{Z}}$.

② האיבר היסודי ופונקציית אינווריאנט של הרחבה לא מסועפת

א) L/K לא מ., בפרט G ציקלית מסדר $[L:K]=n=|G|$ עם יוצר $\varphi=\varphi_{L/K}=\varphi_K|_L$. G ציקלית ולכן ראינו איזו׳ $H^2(L/K)\longleftrightarrow H^0(L/K)=\frac{K^*}{N_{L/K}L^*}$

$$\bar{\eta}_a \longleftarrow aN_{L/K}L^* \in H^0(L/K)$$

כאשר $\bar{\eta}_a$ נתון ע״י $\eta_a(\varphi^i,\varphi^j)=\begin{cases}1 & i+j<[L:K]\\ a & \text{o/w}\end{cases}$

$$\xi \longrightarrow \alpha\cup\xi_\varphi=\nu_f(\varphi)=\Big[\prod_{i=0}^{[L:K]-1}f(\varphi^i,\varphi)\Big]N_{L/K}L^*$$

המיוצג ע״י קוציקל

ב) ראינו $H^0(L/K)$ ציקלית מסדר $[L:K]$ עם יוצר $\pi(N_{L/K}L^*)$ ולכן גם H^2 עם $\bar{\eta}_\pi=u_{L/K}$

כאשר $\eta_\pi(\varphi^i,\varphi^j)=\begin{cases}1 & i+j<[L:K]\\ \pi & \text{o/w}\end{cases}$ ל- $0\le i,j\le[L:K]-1$.

ומתקיים $u_{L/K}\cup\xi_\varphi=\nu_{\eta_\pi}(\varphi)=\pi(N_{L/K}L^*)$. $u_{L/K}$ נקרא האיבר היסודי של L/K.

③ לכל ה׳ ציקלית מסדר n עם יוצר θ קיים הומ׳ יחיד $H\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\theta^i\mapsto\frac{i}{n}+\mathbb{Z}$

ההופכי לאיז׳ תחת צמצום טווח. ניישם זאת לחבורות לעיל עם היוצרים $u_{L/K}$, $\pi(N_{L/K}L^*)$ ונקבל תרשים חילופי:

ייחודיות ~~[illegible]~~ פונקציית $\mathrm{inv}_{L/K}$

של L/K [illegible]

$$\begin{tikzcd} H^2(L/K) \arrow[rr, shift left, "\cdot u"] \arrow[dr, shift left, "\mathrm{inv}_{L/K}"] & & H^0(L/K) \arrow[ll, shift left, "-\cup \bar{s}"] \arrow[dl, shift left] \\ & \frac{i}{[L:K]}+\mathbb{Z} \arrow[ul, shift left, "\pi^i"] \arrow[ur, shift left, "\pi^i"] & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(I) $\mathrm{inv}_{L/K}u_L=\frac{1}{[L:K]}+\mathbb{Z}$

אז קובע יחידות (II) $\mathrm{inv}_{L/K}\alpha=\frac{i}{[L:K]}+\mathbb{Z}$ כאשר $\alpha=u_{L/K}^i$

אז $\alpha\cup\delta_\varphi=\pi^i(N_{L/K}L^*)$. בהצמדה טבעית ל- $\frac{\frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$

נקבל עוד. הדרך אפשר לקבל inv גם ע"י $H^2(L/K)=H^2(G,L^*)\xrightarrow{H^2(G,v)}H^2(G,\mathbb{Z})\xrightarrow{\delta^{-1}}H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

ע"י סדרה מדויקת $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$. $\quad \overset{\|}{\hat{G}}\xrightarrow{\chi\mapsto\chi(\varphi)}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(3) אינפלציה

$K\subseteq L\subseteq M$ ל-M אז יש אינפלציה $\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}: H^2(L/K)\to H^2(M/K)$

$$H^2(G(L/K),L^*)\cong H^2\left(\frac{G(M/K)}{G(M/L)},(M^*)^{G(M/L)}\right)\xrightarrow{\mathrm{inf}}H^2(M/K,M^*)$$

<u>טענה</u> בסימונים אלה (א) $\mathrm{inv}_{M/K}\circ\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}\overset{?}{=}\mathrm{inv}_{L/K}$ ו-(ב) $\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}u_{L/K}=u_{M/K}^{[M:L]}$.

<u>הוכחה</u> (ב)⇐(א) מאחר ש-$u_{L/K}$ יוצר של $H^2(L/K)$ די להפעיל את א' עליו.

ואכן, $\mathrm{inv}_{M/K}\circ\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}u_{L/K}=[M:L]\mathrm{inv}_{M/K}u_{M/K}$ וזה שווה ל-

$[M:L]\left(\frac{1}{[M:K]}+\mathbb{Z}\right)=\frac{1}{[L:K]}+\mathbb{Z}=\mathrm{inv}_{L/K}u_{L/K}$.

(ב) יהי π ראשוני של K ⇐ של L ⇐ של M. $G(L/K), G(M/K)$

ציקליות עם יוצרים $\varphi_{M/K}=\varphi_K|_M,\ \varphi_{L/K}=\varphi_K|_L$ ולכן $\varphi_{L/K}=\varphi_{M/K}|_L$.

יהי $0\le t<[M:K]$ כך ש- $\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}u_{L/K}=u_{M/K}^t$, צ"ל $t=[M:L]$.

יהי $F:G(M/K)^2\to M^*$ קוציקל המייצג את $\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}u_{L/K}$

אז $\prod_{i=0}^{[M:K]-1}F(\varphi^i_{M/K},\varphi_{M/K})(N_{M/K}M^*)=\pi^t(N_{M/K}M^*)$, כמו $u_{L/K}$ מיוצג

ע"י קוציקל $f:G(L/K)^2\to L^*$ הנתון ע"י $f(\varphi^i_{L/K},\varphi^j_{L/K})=\begin{cases}1 & i+j<[L:K]\\ \pi & \text{אחרת}\end{cases}$

$0\le i,j<[L:K]$

לכן ניתן לקחת כ-F את

$F(\varphi^i_{M/K},\varphi^j_{M/K})=f(\varphi^i_{L/K},\varphi^j_{L/K})$

$0\le i,j<[L:K]$

ולכן $t=$ מספר הפעמים שבסדרה $0,1,2,\dots,[M:K]-1$

מופיע i השווה ל- $[L:K]-1$ מודולו $[L:K]$ - $[M:L]$.

<u>מסקנה</u> באותם סימנים, $\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}$ חח"ע, כי $\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}\alpha=0$ גורר $\mathrm{inv}_{L/K}\alpha=0$

ולכן $\alpha=0$ כי inv חח"ע.

5) $H^2(K^{nr}/K)$

א) תזכורת - טרנזיטיביות אינפלציה - אם $K\subset L\subset M\subset N$ אז

$\mathrm{inf}^{N/K}_{M/K}\circ\mathrm{inf}^{M/K}_{L/K}=\mathrm{inf}^{N/K}_{L/K}$. נסמן איחוד זר $\coprod=\coprod H^2(L/K)$ על

יחס שקילות $\alpha\in H^2(L_1/K)$, $\beta\in H^2(L_2/K)$ שקולים אם קיימת M/K שמכילה את L_1,L_2 כך ש-

$\inf_{L_1/K}^{M/K}\alpha=\inf_{L_2/K}^{M/K}\beta$. (מ)תכונות כי יחס שקילות, ומסמנים $H^2(K''/K)=\varinjlim_{L/K \text{ ג"ס}} H^2(L/K)\overset{\text{def}}{=}\coprod/\sim$

כאן נסמן מחלקת שקילות של α ב-$[\alpha]$.

בסימונים לעיל מגדירים $[\alpha]+[\beta]=[\inf_{L_1/K}^{M/K}\alpha+\inf_{L_2/K}^{M/K}\beta]$

ו- $0_{H^2(K''/K)}=[0_{H^2(L/K)}]$ הופכים את $H^2(K''/K)$ לחבורה חילופית

עם $-[\alpha]=[-\alpha]$. בנוסף לכל L/K ג"ס יש חח"ע $H^2(L/K)\to H^2(K''/K):\alpha\mapsto[\alpha]$

ו- $H^2(K''/K)$ איחוד התמונות.

(ב) כדי נשתמש בכך ש-$\inf$ חח"ע. נוכיח:

(1) $[\alpha]=[\beta]\Leftarrow\inf_{L_1/K}^{M/K}\alpha=\inf_{L_2/K}^{M/K}\beta$ לכל $M\supseteq L_1,L_2\supseteq K$ (ג"ס).

(2) הקומ' $H^2(L/K)\to H^2(K''/K):\alpha\mapsto\alpha$ חח"ע.

<u>הוכחה</u> $[\alpha]=0$ אז יש L_1 עם $[\alpha]=[0_{H^2(L_1/K)}]$ ולכן ב-$M\supseteq L,L_1$

נקבל $\inf_{L/K}^{M/K}\alpha=\inf_{L_1/K}^{M/K}0=0$ ולכן $\alpha=0$.

(ג) לאור זאת מסתכלים על $H^2(L/K)\hookrightarrow H^2(M/K)$ וגם $H^2(L/K)\hookrightarrow H^2(K''/K)$

כהכלות, וכותבים $H^2(K''/K)=\bigcup_{L/K \text{ ג"ס}}H^2(L/K)$.

(ד) השוויון $inv_{M/K}\circ\inf_{L/K}^{M/K}=inv_{L/K}$ מראה שקיים הומ' יחיד $inv_K:H^2(K''/K)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

כך שלכל L/K ג"ס, $inv_K|_{H^2(L/K)}=inv_{L/K}$ - כלומר $inv_K[\alpha]=[inv_{L/K}\alpha]$

<u>משפט</u> inv_K איזו'.

<u>הוכחה</u> $inv_K[\alpha]=0$ אז $[inv_{L/K}\alpha]=0$ ולכן $\alpha=0$. $Im\,inv_K=\bigcup_{L/K \text{ ג"ס}}Im\,inv_{L/K}=\bigcup_{L/K \text{ ג"ס}}\frac{\mathbb{Z}}{[L:K]}/\mathbb{Z}=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

פרק 22 - חבורת בראואר של שדה כללי

מדגישו לא מניחים שכל השדות מקומיים.

(1) <u>יישום משפט הילברט-נתר וסדרות אינפלציה-צמצום</u>

במצב $F\subseteq K\subseteq L$ גלואה סופיות, לפי הילברט-נתר $H^1(G(L/K),L^*)=1$.

נסמן $G=G(L/F)$, $\Gamma=G(L/K)$ אז $\Gamma\trianglelefteq G$ ו- $(L^*)^\Gamma=K^*$ ולכן

נקבל סדרה מדויקת של אינפלציה-צמצום.

$1\to H^2(G/\Gamma,K^*)\xrightarrow{\inf}H^2(G,L^*)\xrightarrow{res}H^2(\Gamma,L^*)$ ו- $G/\Gamma\cong G(K/F)$

ונקבל $1\to H^2(K/F)\xrightarrow{\inf}H^2(L/F)\xrightarrow{res}H^2(L/K)$ ובפרט האינפלציה חח"ע.

(2) <u>חבורת בראואר של הרחבת גלואה (לא בהכרח סופית)</u>

(1) <u>הגדרה</u> Ω/F ~~גלואה~~ אלגברית היא <u>גלואה</u> אם היא איחוד

הרחבות גלואה סופיות, אז לכל $x_1,\dots,x_n\in\Omega$ יש תת

הרחבה $L/F \subseteq \Omega/F$ גלואה סופית עם $x_1,\dots,x_n \in L$.

(ב) לאור טרנזיטיביות אינפלציה ניתן להגדיר $H^2(\cdot/F) := H^2(*/F) = H^2(\Omega/F) = \varinjlim_{\substack{L/F \subseteq \Omega/F \\ \text{גלואה סופית}}} H^2(L/F)$.

לאור חח"ע האינפלציה $H^2(L/F) \hookrightarrow H^2(\Omega/F)$ הופכת (אם סופית) /הכלה

$$H^2(\Omega/F) = \bigcup_{\substack{L/F \\ \text{גלואה} \\ \text{סופית}}} H^2(L/F)$$

(ג) <u>אינפלציה מוכללת</u>

תהיינה $F \subset \Delta \subset \Omega \subseteq F^{sep}$ גלואה, אז $H^2(\Delta/F) \subseteq H^2(\Omega/F)$ (מסומן כהכלה או אינפלציה מוכללת).

(ד) <u>הגדרה:</u> בהינתן שדה F, ח' בראואר של F היא $B_F = H^2(F^{sep}/F) = \varinjlim_{\substack{L/F \\ \text{גלואה סופית}}} H^2(L/F)$.

<u>דוגמה:</u> ל-K שדה מקומי יש הכלה $H^2(K^{ur}/K) \subseteq B_K$.

<u>פרק 23 - חב' בראואר של שדה מקומי</u>

(1) <u>הא"ש השוויון היסודי השני</u>

<u>משפט</u> תהי L/K הרחבת גלואה סופית של שדות מקומיים. אז:

$|H^2(L/K)| \underset{\text{מחלק}}{\Big|} [L:K]$ ובפרט סופית ו-$|H^2(L/K)| \le [L:K]$

<u>הוכחה</u> ל-L/K ציקלית זהו שוויון. נוכיח באינדוקציה על $[L:K]$ -

נסמן $G = G(L/K)$

<u>חלק ראשון</u> נניח G <u>חבורת p</u>. אפשר להניח שהיא לא ציקלית ולכן יש $1 \ne \Gamma \trianglelefteq G$, כלומר קיימת תת הרחבת גלואה $K \subsetneq M \subsetneq L$ וממסדרת אינפלציה-צמצום המדויקת $1 \to H^2(M/K) \to H^2(L/K) \xrightarrow{\pi} H^2(L/M)$. לכן

$$|H^2(L/K)| = |H^2(M/K)|\cdot|\mathrm{Im}\,\pi| \underset{\text{לגרנז'}}{\Big|} \underbrace{|H^2(M/K)|\cdot|H^2(L/M)|}_{\text{הכל סופי מהנחת האינדוקציה}} \underset{\text{אינדוקציה}}{\Big|} [M:K]\cdot[L:M] = [L:K]$$

<u>חלק שני</u> במקרה כללי - נניח G לא חב' p. לכל ראשוני p תהי $G_p \le G$ תת ח' סילו. אז $L_p := \mathrm{Fix}\,G_p \subseteq L$ גלואה עם $G(L_p/K) = G_p$. מתכונות צמצום ראינו שיש סדרה מדויקת $1 \to H^2(G, L^*)_p \xrightarrow{res} H^2(G_p, L^*)$ ובפרט

$|H^2(G, L^*)_p| \,\big|\, |H^2(L/L_p)|$ ולפי אינדוקציה נקבל

$$|H^2(L/K)| = \prod_{p\,|\,|G|} |H^2(L/K)_p| \underset{\text{מהסדרה המדויקת}}{\Big|} \prod_{p\,|\,|G|} |H^2(L/L_p)| \underset{\text{מאינדוקציה}}{\Big|} \prod_{p\,|\,|G|} [L:L_p] = \prod_{p\,|\,|G|} p^{ord_p|G|} = |G| = [L:K]$$