V1005
1/1/15

קוהומולוגיות

⑤ הסגור הלא-מסועף

הגדרה L/K הרחבה סופית של שדות מקומיים, $p=\operatorname{char}\bar{K}$. התנאים הבאים שקולים:

(א) L/K לא מסועפת.

(ב) L מתקבלת מ-K ע"י הוספת שורש יחידה מסדר זר ל-p.

(ג) כמו ב' אבל עם מספר שורשי יחידה.

הוכחה (א)$\Leftarrow$(ב) כי K_f מתקבל ע"י הוספת שורש יחידה מסדר זר ל-p (p^f-1).

(ב)$\Leftarrow$(א) כי אם n זר ל-p ו-$g(x)=x^n-1\in\mathcal{O}_K[x]$ אז $\bar{g}\in\bar{K}[x]$ ספרבילי.

(ב)$\Leftarrow$(ג) מ"ד.

(ג)$\Leftarrow$(א) ע"י מגדל של הרחבות לא מסועפות (כי (ב)$\Leftarrow$(א)).

מכאן כל ההרחבות האלגבריות ספרביליות.

מסקנות תהיינה הרחבות סופיות של שדות מ'.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & LM \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L \arrow[dr, dash] & & M \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$

(א) L/K לא מסועפת $\Leftarrow$ LM/M לא.

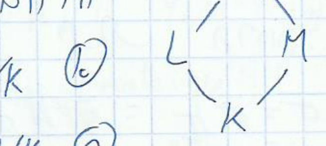
(ב) LM/K לא $\Longleftrightarrow$ L/K לא, M/K לא.

הגדרה יהי K שדה מקומי. אז מגדירים $K^u=\bigcup_{f=1}^{\infty}K_f$ הסגור הלא מסועף של K (לא שדה מקומי - שדה שארית אינסופי) (מסומן גם $\tilde{K}, K^{ur}, K^{unr}$).

תכונות ① K^u גלואה אינסופית (איחוד גלואה סופיות) ומתקבל מ-K ע"י הוספת כל שורשי היחידה מסדר זר ל-p.

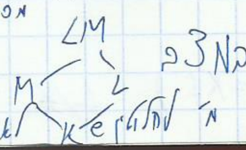
② אם $K\subseteq H\subseteq K^u$ תת הרחבה סופית, H/K לא מסועפת.

③ L/K הרחבה סופית (נזכיר - L_0/K תת הרחבה לא מסועפת מקסימלית של L/K) אז $L_0=L\cap K^u$, $L^u=K^uL$. נקבל תרשים



אי תלות במ3ב

נזכיר (א) $L\cap M=K$ (כי מ' לחלוטין וגם לא מ').



ב) LM/M לא מ׳ (מסדר f), LM/L מ׳ לחלוטין מסדר e.

פרק 20 - פרובניוס

① **תזכורת** $GF(q)$ שדה סופי. נגדיר $\Phi = \Phi_{GF(q)} : GF(q)^{al} \to GF(q)^{al}$
ע״י $\Phi(x)=x^q$. אז Φ שיכון של שדות ולכן איזו׳.
לכל $i=0,1\ldots$ $\Phi^i(x)=x^{q^i}$ ושדה השבת של Φ^i
הוא $GF(q^i)$.

מסקנה לכל $f=1,2,\ldots$, $G(GF(q^f)/GF(q))$ ציקלית עם יוצר $\Phi|_{GF(q^f)}$
מסדר f.

② **פעולת חבורת גלואה על שדה השארית**

א) L/K גלואה סופית, אז $\bar{L}/\bar{K}$ גלואה סופית (הרחבה של שדות סופ״ם). יהי $\sigma\in G(L/K)$, אז σ שומר על ההערכה ובפרט $\sigma(P_L)=P_L$, $\sigma(O_L)=O_L$, ומאחר ש- $\bar{L}=O_L/P_L$ נקבל שיכון של שדות $\bar{\sigma}:\bar{L}\to\bar{L}:\bar{x}\to\overline{\sigma x}$. קיבלנו הומ׳ של חב׳ $r=r_{L/K}:G(L/K)\to G(\bar{L}/\bar{K}):\sigma\to\bar{\sigma}$.
הערה אם $K\subseteq L\subseteq M$ גלואה ו- $\sigma\in G(M/K)$ ברור ש- $\bar{\sigma}|_{\bar{L}}=\overline{\sigma|_L}\in G(\bar{L}/\bar{K})$.

ב) תהי $L_0/K\subseteq L/K$ תת הרחבה לא מסועפת מקסימלית. $\bar{L}_0=\bar{L}$.
לכן $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}|_{\bar{L}_0}=\overline{\sigma|_{L_0}}$. בפרט $G(L/L_0)\subseteq\ker r_{L/K}$ ו- $r_{L/K}$
מתפרק בצורה $r_{L/K}:G(L/K)\xrightarrow{\text{צמצום}}G(L_0/K)\xrightarrow{r_{L_0/K}}G(\bar{L}_0/\bar{K})=G(\bar{L}/\bar{K})$

ג) L_0/K לא מ׳ ולכן יש f כך ש- $L_0=K_f=\{$שדה פיצול של $\underbrace{x^{q^f-1}-1}_{g(x)}\}$
יהיו $x_1,\ldots,x_d$ שורשי g ב- L, אז $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_d$ שורשי $\bar{g}$ ב- $\bar{L}_0$.
מכאן נסיק $r_{L_0/K}:G(L_0/K)\to G(\bar{L}/\bar{K})$ חח״ע.
אכן: $\sigma\in\ker r_{L_0/K}$. יהי $1\le i\le d$ ונסמן j כך ש- $x_j=\sigma x_i$.
אז $\bar{x}_j=\overline{\sigma x_i}=\bar{\sigma}\bar{x}_i=\bar{x}_i$ ולכן $i=j$ ו- $\sigma=id$.
נזכור ש- $[L_0:K]=\underbrace{e_{L_0/K}}_{=1}f_{L_0/K}=[\bar{L}_0:\bar{K}]$.

מסקנות א) אם M/K לא מ׳ אז $r_{M/K}$ איזו׳ של חב׳.
ב) לכל הרחבת גלואה סופית M/K, $r_{M/K}$ על.

③ **פרובניוס**

לכל הרחבה לא מסועפת L/K ($L=K_f$) יש איזו׳ $r_{L/K}$ מין

$G(L/K)$ ו- $G(\bar L/\bar K)$ ולכן קיים ויחיד $\varphi_{L/K}\in G(L/K)$ כך ש- $\overline{\varphi_{L/K}} = \Phi_{\bar K}|_{\bar L} = \Phi|_{\bar L}$.

אפיון $\varphi_{L/K}\in G(L/K)$ היחיד כך ש- $\overline{\varphi_{L/K}}(x) = x^q$ או $\varphi_{L/K}(y)-y^q\in \mathfrak{P}_L$ לכל $y\in\mathcal{O}_L$.

הרחבות אם $K\subseteq L\subseteq M$ לא מסועפות אז $\varphi_{M/K}|_L=\varphi_{L/K}$ כי

$$\overline{\varphi_{M/K}|_L} = \overline{\varphi_{M/K}}|_{\bar L} = (\Phi_{\bar K}|_{\bar M})|_{\bar L} = \Phi_{\bar K}|_{\bar L} = \overline{\varphi_{L/K}}.$$

מסקנה קיים איבר יחיד $\varphi=\varphi_K\in G(K^{nr}/K)$ כך שלכל L/K לא מסועפת מתקיים $\varphi|_L=\varphi_{L/K}$. φ נקרא הפרובניוס של K.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & LM \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L \arrow[dr, dash] & & M \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$

טענה (הצגות) יהי נתון תרשים של הרחבות סופיות (של שדות מקומיים) ונניח L/K לא מ' (ולכן גם LM/L).

מתקיים $\varphi_{LM/M}|_L = \varphi_{L/K}^{f_{M/K}}$.

בדיקה נסמן $\bar K = GF(q)$ אז $\bar M = GF(q^{f_{M/K}})$. לכל $x\in \bar L$,

$$\overline{\varphi_{L/K}^{f_{M/K}}}(x) = \overline{\varphi_{L/K}}^{f_{M/K}}(x) = \Phi_{\bar K}^{f_{M/K}}(x) = x^{q^{f_{M/K}}} = \Phi_{\bar M}(x) = \overline{\varphi_{LM/M}}(x) = \overline{\varphi_{LM/M}|_L}(x)$$

מסקנה בהינתן הנחות $\varphi_M|_{K^{nr}} = \varphi_K^{f_{M/K}}$.

מקרה פרטי $K\subseteq M\subseteq L$ ו- L/K לא מסועפת אז $\varphi_{L/M} = \varphi_{L/K}^{[M:K]}$.

כי $\varphi_{L/M} = \varphi_{LM/M} = \varphi_{L/K}^{f_{M/K}}$ ו- $f_{M/K}=[M:K]$. כמו קודם, $\varphi_M = \varphi_K^{[M:K]}$.

[איך לחשב פרובניוס? Cohen, Computational NT].