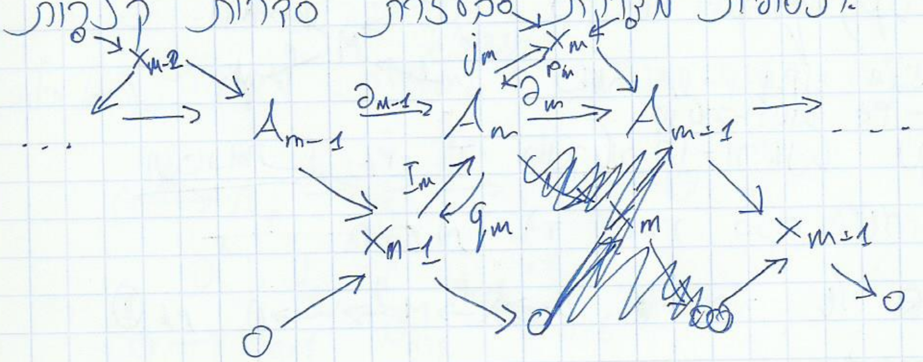
30/10/14

W1D5

קוהומולוגיות וכו'

תכונות דיוק של פונקטורים (המשך):

ג) תיאור סדרה אינסופית מדויקת באמצעות סדרות קצרות -



אם הקצרות מדויקות גם הארוכה. אם A מדויקת
תמיד אפשר לקחת $X_m = \mathrm{Im}\,\partial_m = \ker \partial_{m+1}$ ולקבל סדרות קצרות מדויקות
ע"י העתקת הכלה $X_{m-1} \to A_m$ והעתקה המושרה מ-∂_m, $A_m \to X_m$.

אם הקצרות מתפצלות נוכל לבנות (בכיוון) הפוך ל-∂_m -
$D_m = p_{m-1} q_m$ -ו

$$\partial_{m-1} D_m + D_{m+1}\partial_m = \partial_{m-1} p_{m-1} q_m + p_m q_{m+1} \partial_m =$$

$$i_m \underbrace{j_{m-1} p_{m-1}}_{id_{X_{m-1}}} q_m + p_m \underbrace{q_{m+1} i_{m+1}}_{id_{X_m}} j_m = i_m q_m + p_m j_m = id_{A_m}$$

כלומר זו הומוטופיה מכווצת.

אם M $\mathbb{Z}$-מודול חופשי אז כל תת $\mathbb{Z}$-מודול חופשי'
[Hilton Stambard - course in homological alg. p. 27 th. 5.1]

אז תהי סדרה מדויקת של $\mathbb{Z}$ מודולים חופשיים ונעשה לה X_n-ים.
אז ה-X_n-ים חופשיים ולכן הסדרות הקצרות מתפצלות
ולכן גם הארוכה. לכן מסקנה: לסדרה מדויקת של $\mathbb{Z}$ מודולים
יש הומוטופיה מכווצת.

יהי $T: \mathbb{Z}\text{-mod} \to R\text{-mod}$ פונקטור ו- $(A)\ \dots \to A_{m-1} \to A_m \to A_{m+1} \to \dots$
סדרה מדויקת של $\mathbb{Z}$ מודולים חופשיים ו-$\mathbb{Z}$ הח, אז
$(TA)\ \dots \to TA_{m-1} \to TA_m \to$
מדויקת חגם מתפצלת גם מעל $\mathbb{Z}$ - דאיק פשוט מספיק
לבדוק מעל $\mathbb{Z}$, כל הדברים בעצם מתנהגים יפה רק מעל $\mathbb{Z}$)
מודול חופשי קו..'

יהי X $\mathbb{Z}[G]$ מודול חופשי עם $\mathbb{Z}[G]$-בסיס $\{[e_j]\}_{j\in J}$, אז גם

גם $\mathbb{Z}$ חופשי עם בסיס $\{\sigma[e_j]\}_{j\in J,\sigma\in G}$. נסמן $X^*=\mathrm{Hom}(X,\mathbb{Z})$ G-מודול.

נסמן בסיס דואלי $\sigma\langle e_j\rangle$: $(\sigma\langle e_j\rangle)(\tilde\sigma[e_{\tilde j}]) = \delta_{\sigma,\tilde\sigma}\delta_{j,\tilde j}$.

פעולת G על הבסיס: $\tau(\sigma\langle e_j\rangle)(\tau^{-1}\tilde\sigma[e_{\tilde j}]) = \sigma\langle e_j\rangle(\tau^{-1}\tilde\sigma[e_{\tilde j}]) = \delta_{\sigma,\tau^{-1}\tilde\sigma}\delta_{j,\tilde j} = \delta_{\tau\sigma,\tilde\sigma}\delta_{j,\tilde j} = (\sigma\tau\langle e_j\rangle)(\tilde\sigma[e_{\tilde j}]) \Rightarrow \tau(\sigma\langle e_j\rangle)=(\tau\sigma)\langle e_j\rangle$

כי $\mathbb{Z}$ טריוויאלי כ-G-מודול

ולכן $1_G\langle e_j\rangle$ $\mathbb{Z}[G]$ בסיס ל-X^*.

בנ"ת הקוהומולוגיה של ט"ט

G חבורה סופית, $\mathbb{Z}$ G-מודול טריוויאלי. G-מודול חופשי נ"ס G-איזומורפי ל-$\mathbb{Z}[G]^k$. לכל G-מודול נ"ס יש $\mathbb{Z}[G]^k\to M$ על.

פתרונות

פתרון משמאל של $\mathbb{Z}$ הוא סדרה מדויקת של G-מודולים (חופשיים) נ"ס.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \qquad (*)$$

קיים

עבור G-הומ' ו-X G-מודולים חופשיים נ"ס (כי $\mathbb{Z}$ נטרי).

פתרון מימין הוא סדרה דומה של G-מודולים חופשיים נ"ס ו-G הומ':

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} X_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} X_{-2} \xrightarrow{\partial_{-2}} \cdots$$

קיים פתרון מהפעלת $\mathrm{Hom}(\_,\mathbb{Z})$ על $(*)$. נקבל

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(X_0,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}(X_1,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2^*} \cdots$$

ראינו שאלה G-מודולים חופשיים נ"ס. מספיק דיוק ל-$\mathbb{Z}$-מודולים וזה נשמר ע"י פונקטורים כפי שראינו. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ ל-$\mathbb{Z}$ מודולים ולכן גם כ-G מודולים כי $\mathbb{Z}$ הוא G-מודול טריוויאלי.

נרצה ליצור מ-2 אלה פתרון מלא. זה מתבצע בעזרת ט"ט:

נשלב את 2 הפתרונות עם קביעת $\partial_0=\mu\circ\varepsilon$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_2"] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] & X_0 \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[dr] & & X_{-1} \arrow[r, "\partial_{-1}"] & X_{-2} \arrow[r, "\partial_{-2}"] & \cdots \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

מדויק לפי הסדרות הקצרות

תיאור שקול (למשל ב-Lang):

מתחילים מסדרה דו צדדית

אינסופית מדויקת עם ε:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_2"] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] & X_0 \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & X_{-1} \arrow[r, "\partial_{-1}"] & \cdots \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\mu"] \arrow[dr] & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

ניתן לבנות μ ולקבל פתרון מלא.

איך בונים את הקוהומולוגיה (תלויה ב-X)?

<u>קוהומולוגיה ביחס לפתרון מלא X:</u>

לכל G-מודול A נקבל קומפלקס של חבורות חילופיות ע"י הפעלת הפונקטור $\mathrm{Hom}(\_,A)$. נקבל:

$$\xleftarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}(X_0,A) \xleftarrow{\partial_0^{*G}} H_G(X_{-1},A) \xleftarrow{\partial_{-1}^*} \cdots$$ קו-ציקלוס

ומגדירים $H^{m*}(G,A)=\frac{\ker\partial_{m+1}^*}{\operatorname{Im}\partial_m^*}$ שפות (לפעמים קו-שפות), זה איבר של $\mathbb{Z}$-mod. סימונים נוספים – $H_G^m(A)$, $H^m(A)$, $H_\times^m(G,A)$, $H^*(G,A)=H(\mathrm{Hom}(G,A))$. שים לב שהסדרה לא מדויקת כי $\mathrm{Hom}_G(\_,A)$ מעביר ל-$\mathbb{Z}$ מורפיזמים ולכן אין פיצול בעזרת G-הומומורפיזם אלא רק $\mathbb{Z}$-הומ'.

<u>זו חבורת הקוהומולוגיה של טייט</u>. לפעמים מסמנים ב-$\hat{H}$ כדי להבדיל מהומולוגיה רגילה, שאנחנו בכלל לא נשתמש בה בק"ס. (לאינדקס שונה מ-0 זו בעצם ההומולוגיה הרגילה).