W1003

30/12/14

קוהומולוגיות

פרק 18 - תת חבורה של היחידות שהיא אציקלית

(1) למה (בשפה חיבורית): G סופית ו-A G-מודול עם פילטרציה $A=A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\dots$ כך ש-

(א) $\bigcap_{m=0}^{\infty}A_m=\{0\}$

(ב) לכל סדרה $a_m\in A_m$ קיים $a:=\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ כך ש- $a-\sum_{k=0}^{k}a_k\in A_{k+1}$ $\forall k$.
(a יחיד לפי א').

יהי $i\in\mathbb{Z}$, אם $H^i(G,A_n/A_{n+1})=0$ לכל $n=0,1,\dots$ אז $H^i(G,A)=0$. בפרט, אם A_n/A_{n+1} אציקלית אז גם A (כנ"ל לט' קוהומולוגיות).

הוכחה נשתמש בשפה של שרשראות, $G^{|i|}\to A$ (או בפשט איבר מ-A) [illegible] $j=\operatorname{sgn} i$, $|i|=i\cdot j$

נקבל פילטרציות $C^j(G,A)=C^j(G,A_0)\supseteq C^j(G,A_1)\supseteq\dots$

עם תכונות א', ב' מתאימות. כעת יהי $\alpha\in H^i(G,A)$ ו-

$f_0\in H^i(G,A_0)$ קוציקלוס המתאר אותו. נשתמש בסדרה $0\to A_1\to A_0\to A_0/A_1\to 0$

מאחר ש- $H^i(G,A_0/A_1)=0$ נובע ש- $H^i(G,A_1)\to H^i(G,A_0)$ היא על. לכן קיים

קוציקלוס $f_1\in C^i(G,A)$ כך שהתמונה שלו ב- $C^i(G,A_0)$ מייצגת

את α, כלומר קיימת שרשרת $g_0\in C^{i-1}(G,A_0)$ כך ש- $f_0-\partial g_0=f_1$.

כעת f_1 מייצג $\alpha_1\in H^i(G,A_1)$. נשתמש ב- $0\to A_2\to A_1\to A_1/A_2\to 0$ כמו

קודם ונסיק שיש $f_2\in C^i(G,A_1)$, $g_1\in C^{i-1}(G,A_1)$ כך ש- $f_1-\partial g_1=f_2$

ואז $f_0-\partial(g_0+g_1)=f_2$ נמשיך באינדוקציה $f_0-\partial(g_0+\dots+g_n)=f_{n+1}\in C^i(G,A_{n+1})$.

נסמן $g=\sum_{i=0}^{\infty}g_i\in C^{i-1}(G,A)$ אז $\partial(g-g_0-\dots-g_{n-1})\in C^i(G,A_n)$ ולכן $f-\partial g\in C^i(G,A_n)$ לכל

n ולכן $f=\partial g$ ו- $\alpha=0$.

(2) **משפט**: תהי L/K הרחבת גלואה סופית של שדות מקומיים. אז קיימת תת חבורה פתוחה $V\subseteq U_L$ שהיא תת-מודול של U_L כך ש-

V טריוויאלי קוהומולוגית (בפרט אציקלית).

הוכחה קיים בסיס נורמלי. כלומר יש $\alpha\in L$ כך ש $\{\sigma\alpha\mid\sigma\in G\}$ הוא

K-בסיס ל-L ($G=G(L/K)$). ע"י כפל באיבר מ-K אפשר להניח

$|\alpha|\le 1$ ולכן $\alpha\in O_L$. נקבל התאמה חח"ע ועל $[\,]:L\to K^{|G|}$, $x\to\{c_\sigma\}_{\sigma\in G}$

והעתקה זו הומ' לפי המשפט על מ' נורמיים (למשל עם $K^{|G|}$ בנורמת sup).

נסמן $M=\sum_{\sigma\in G}\mathcal{O}_K\sigma\alpha$ אז M תת מודול חופשי של $\mathcal{O}_L$ מעל $\mathcal{O}_K$ ו-M תת קבוצה פתוחה וסגורה של L (כי $\mathcal{O}_K^{|G|}\subseteq K^{|G|}$ פתוחה וסגורה).

כיוון ש-$\mathcal{O}_L$ הוא $\mathcal{O}_K$ מודול חופשי נ"ס ו-πM פתוחה קיים $n_0\geq 1$ כך ש-$\pi^{n_0}\mathcal{O}_L\subseteq\pi M$ (כאשר $\pi=\pi_K$ ראשוני של K). לכל $n>n_0$ נקבל:

$$(\pi^n M)(\pi^n M)\subseteq\pi^{2n}\mathcal{O}_L^2\subseteq\pi^{2n}\mathcal{O}_L=\pi^{2n-n_0}\pi M\subseteq\pi^{n+1}M\subseteq\pi^n M.$$

נסמן $V_n=1+\pi^n M$ (ל-$n\geq n_0$). אז V_n פתוחה וסגורה ב-L ו-$V_n\subseteq U_L$ כי אם $m\in M$ אז $|m|\leq 1$ ולכן $|\pi^n m|<1$ ולכן $|1+\pi^n m|=1$.

V_m גם תת חבורה של U_L - סגורה לכפל כי $V_mV_m=(1+\pi^m M)(1+\pi^m M)\subseteq 1+\pi^m M=V_m$ וסגורה להופכי כי $(1+\pi^m m)^{-1}=1+\sum_{j=1}^{\infty}(-\pi^m m)^j$, והסכומים החלקיים של הטור ב-$\pi^m M$ ו-$\pi^m M$ סגורה. M אינווריאנטי ל-G ולכן V_m הוא G-מודול. נראה V_{n_0} ט' קוהומ' ע"י כך שהפילטרציה $V_{n_0}\supseteq V_{n_0+1}\supseteq V_{n_0+2}\supseteq\ldots$ מקיימת את תנאי הלמה.

(א) מיידי ש-$\bigcap_{n=n_0}^{\infty}V_n=\{1\}$ כי $x=1+\pi^n m\in V_n\Rightarrow|x-1|\leq|\pi|^n$.

(ב) תהי $a_n\in V_n$ סדרה אז קיימים $x_n\in M\subseteq\mathcal{O}_L$ כך ש-$a_n=1+\pi^n x_n$ ובפרט $|a_n|=1$, אז $\left|\prod_{n=n_0}^{k+1}a_n-\prod_{n=n_0}^{k}a_n\right|=\left|\prod_{n=n_0}^{k}a_n\right||a_{k+1}-1|\leq|\pi|^{k+1}\to 0$ ולכן יש גבול a. כעת לכל $m\geq n_0$: $a(a_{n_0}a_{n_0+1}\cdots a_m)^{-1}=\lim_{k\to\infty}\prod_{k=m+1}^{k}a_k\in V_{m+1}$ כי V_{m+1} סגורה ולכן גם (ב) מתקיים.

נראה ש-V_m/V_{m+1} מושרה (ובפרט ט' קוהומולוגית). לכל $m\in M$ יש ייצוג יחיד $m=\sum_{\sigma\in G}c_\sigma\sigma\alpha$ עם $c_\sigma\in\mathcal{O}_K$ ולכן $m\in\pi M\Leftrightarrow c_\sigma\in\pi\mathcal{O}_K$. אז $M=\sum_{\sigma\in G}\mathcal{O}_K\sigma\alpha=\bigoplus_{\sigma\in G}\mathcal{O}_K\sigma\alpha=\bigoplus_{\sigma\in G}\sigma(\mathcal{O}_K\alpha)$. לכן עבור $B\subseteq M/\pi M$ חילופית ע"י $B=\mathcal{O}_K\alpha+\pi M$ נקבל $M/\pi M=\bigoplus_{\sigma\in G}\sigma B$. לבסוף (לכן $M/\pi M$ מושרה.) נראה $\frac{M}{\pi M}\cong V_n/V_{n+1}$ כ-G-מודולים. מההגדרה יש העתקה על $f:M\to V_n/V_{n+1}$ ע"י $m\mapsto(1+\pi^n m)V_{n+1}$ שמתחלפת עם פעולת G (כי $\pi\in K$ ולכן G-אינווריאנטי). נראה ש-f הומ' של חבורות - ניקח $m_1,m_2\in M$ אז $f(m_1)f(m_2)=(1+\pi^n(m_1+m_2)+\pi^{2n}m_1m_2)V_{n+1}$. נסמן $z=1+\pi^n(m_1+m_2)$, אז $f(m_1+m_2)=zV_{n+1}$ ומתקיים $\mathcal{O}_L\pi^{2n}m_1m_2\in\pi^{2n}\mathcal{O}_L\subseteq\pi^{n+1}M$ ו-$z^{-1}\in V_n\subseteq U_L\subseteq\mathcal{O}_L$ ולכן

$f(m_1)f(m_2) = (z+\pi^{2n} m_1 m_2)V_{n+1} = z(1+z^{-1}\pi^{2n} m_1 m_2)V_{n+1} \subseteq z(1+O_L \pi^{2n} m_1 m_2)V_{n+1} \subseteq$
$z(1+\pi^{n+1}M)V_{n+1} = zV_{n+1}V_{n+1} = zV_{n+1} = f(m_1+m_2)$

נניח $m=\sum_{\sigma\in G} c_\sigma \sigma \in \ker f$ אז $1+\pi^n m \in V_{n+1} = 1+\pi^{n+1}M$, כלומר $\forall \sigma\ c_\sigma \in \pi O_K$ ו-
לכן $m\in\pi M$ ונקבל $\ker f = \pi M$ איזו' של G-מודולים $\frac{M}{\pi M} \xrightarrow{\sim} V_n/V_{n+1}$ (משרה $=$)

③ הרחבות ציקליות

ⓐ הבחנה לכל חבורה G סופית $|H^0(G,\mathbb{Z})| = |\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}| = |G|$
ו- $|H^1(G,\mathbb{Z})| = |\mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(G,\mathbb{Z})| = 1$ ובפרט אם G ציקלית $h(G,\mathbb{Z}) = h(\mathbb{Z}) = |G|$

ⓑ משפט: תהי L/K הרחבה ציקלית של שדות מקומיים. אז $h(G,U_L)=1$.
הוכחה: יהי $V\subseteq U_L$ תת G-מודול פתוח כנ"ל. יש
סדרה מדויקת $1\to V\to U_L\to U_L/V\to 1$ ולכן $h(U_L)=h(V)h(U_L/V)$.
אבל $h(V)=1$ ו- U_L קומפקטית ולכן U_L/V סופית ו-
$h(U_L/V)=1$.

ⓒ משפט תהי L/K הרחבה ציקלית של שדות מקומיים. אז
$|H^n(L/K)| = |H^n(G(L/K),L^*)| = \begin{cases}[L:K] & n \text{ even}\\ 1 & n \text{ odd}\end{cases}$

הוכחה ידוע שזה תלוי רק בזוגיות ולפי הילברט-90 $H^1(L/K)=1$
ולכן די להוכיח $h(G,L^*)=[L:K]$. נשתמש בסדרה $1\to U_L\to L^*\xrightarrow{v}\mathbb{Z}\to 1$
ולכן $h(L^*)=h(U_L)h(\mathbb{Z})$. אבל $h(U_L)=1, h(\mathbb{Z})=|G|=[L:K]$ ולכן $h(G,L^*)=[L:K]$.

פרק 19 - הרחבות לא מסועפות

① תזכורת
יהי $q=p^{f_0}$ חזקה ראשונית q. נסמן ב- $GF(q)$ שדה סופי עם q
איברים. לכל $f=1,2,\dots$ קיימת הרחבה יחידה של $GF(q)$ מסדר f,
וזה $\{$שדה הפיצול של $x^{q^f-1}-1\} = GF(q^f) = \{\xi\in\overline{GF(q)} \mid \xi^{q^f-1}=1\}$. מתקיים $GF(q^{f_1})\subseteq GF(q^{f_2})$
אם"ם f_1/f_2

② יהי K שדה מקומי ו- $f=x^n+\dots+a_0\in O_K[x]$ פול' מתוקן. אז $\bar f\in\bar k[x]$
נתייחס לתנאי ש- $\bar f$ ספרבילי.

דוגמה $f=x^n-1$ כאשר $\gcd(n,p)=1$, כאשר $p=\mathrm{char}\,\bar K$.

תיאור ישיר: יהי $f\in\mathcal{O}_K[x]$ מתוקן ממעלה n ותהי L/K סגירת המפצלת
את f. אז $f=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ עם $\lambda_i\in\mathcal{O}_L$ ו-
$\bar f=\prod_{i=1}^{n}(x-\bar\lambda_i)$ פרוק ב-$\bar L[x]$. לכן $\bar f$ ספרבילי $\iff$ $\bar\lambda_i\neq\bar\lambda_j$ $\iff$ $|\lambda_i-\lambda_j|=1$

תכונות: יהי $f\in\mathcal{O}_K[x]$ מתוקן ממעלה n ו-$\bar f$ ספרבילי. אז -

(א) f ספרבילי.

(ב) אם $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K^{al}$ שורשי f אז $\bar\lambda_i\to\lambda_i$ חח"ע.

(ג) אם L/K הרחבה סופית כך ש- $\bar L/\bar K$ מפצלת את $\bar f$ אז L/K מפצלת את f (נובע מהלמה של הנזל).

(ד) f אי-פריק $\iff$ $\bar f$ אי פריק.

הוכחה: אם $\bar f$ פריק $\bar f=\varphi(x)\eta(x)$, φ,η מתוקנים וזרים ב-$\bar K[x]$ כי $\bar f$ ספרבילי. מהלמה של הנזל נקבל פירוק של f.

אם $f=gh$ ב-$K[x]$ הגאוס $g,h\in\mathcal{O}_K[x]$ ונקבל $\bar f=\bar g\cdot\bar h$ פירוק ב-$\bar K[x]$.

(ה) אם $p|f$ ב-$K[x]$ ו-p מתוקן, $\bar f$ ספ' $\Rightarrow$ $\bar p$ ספ' (מיידי בעזרת פירוק).

③ הגדרה: L/K הרחבה של שדות מקומיים. ראינו $[L:K]=e_{L/K}f_{L/K}$.

אם $e_{L/K}=1$ אומרים ש-L/K לא מסועפת.

אם $f_{L/K}=1$ אומרים ש-L/K מסועפת לחלוטין.

מסקנה: מכפליות e,f - אם $K\subseteq L\subseteq M$ הרחבות סופיות, ראינו ש- $f_{M/K}=f_{M/L}\cdot f_{L/K}$ ובדומה ל-e ולכן M/K לא מסועפת $\Rightarrow$ M/L, L/K לא מסועפות (ובדומה למסועפות לחלוטין).

תיאור בעזרת איברים ראשוניים

במצב L/K כרגיל נסמן π_K ו-π_L, מהגדרת $e=e_{L/K}$ נובע $|\pi_K|=|\pi_L|^e$. מסקנה התנאים הבאים שקולים:

1) L/K לא מסועפת.

2) $e=1$

3) קיים ראשוני π של K שהוא גם ראשוני של L.

4) כל ראשוני π של K הוא גם ראשוני של L.

תיאור הרחבות לא מסועפות

<u>למה</u> יהי K שדה מקומי ו- $f\in O_K[x]$ פול מתוקן כך ש- $\bar f$ ספ'.
יהי $\xi\in K^{al}$ שורש של f, אז $K[\xi]/K$ לא מסועפת ו-
$\overline{K[\xi]}=\bar K[\bar\xi]$ (ב- $\bar K^{al}=\overline{K^{al}}$).

<u>הוכחה</u> יהי $p=p_\xi\in K[x]$ פול מינימלי של ξ מעל K. f
מתוקן ולכן גם $p\in O_K[x]$ ומחלק את f ב- $O_K[x]$ ולכן
$\bar p|\bar f$ ב- $\bar K[x]$ ולכן $\bar p$ ספרבילי. p מתוקן וא' פריק
ולכן $\bar p$ א' פריק (כי p ספרבילי). בנוסף $\xi\in O_{K^{al}}$ ו-
$\bar\xi$ שורש של $\bar p$ ולכן $\deg\bar p=\deg p=e_{K[\xi]/K}f_{K[\xi]/K}=[K[\xi]:K]$
וזה שווה $f_{K[\xi]/K}=[\overline{K[\xi]}:\bar K]\geq[\bar K[\bar\xi]:\bar K]$ ולכן יש
שוויון ו- $e_{K[\xi]/K}=1$ כלומר $K[\xi]/K$ לא מסועפת ו- $\overline{K[\xi]}=\bar K[\bar\xi]$.

<u>מקרה פרטי</u> $f=x^n-1$ ו- $\gcd(n,p)=1$ כאשר $p=\mathrm{char}\bar K$ אז $f'=nx^{n-1}$
זר ל- f ולכן f ספ'. <u>מסקנה</u> ההרחבה $K[\xi]$
המתקבלת ע"י הוספת ξ שורש יחידה מסדר
זר ל- p לא (מסדר p-זר) מסועפת ו- $\overline{K[\xi]}=\bar K[\bar\xi]$.

כעת יהי K שדה מקומי ו- $p=\mathrm{char}\bar K$ אז $\bar K=GF(q)$ כאשר $q=p^f$
ו- $\overline{K^{al}}=\bigcup_{f=1}^{\infty}GF(q^f)$.

<u>סימון</u> לכל $f=1,2,\ldots$ נסמן ב- $K\subseteq K_f\subseteq K^{al}$ את שדה הפיצול של $g=x^{q^f-1}-1$
שנוצר ע"י הוספת שורש פרימיטיבי ξ מסדר q^f-1 של היחידה.

<u>תכונות</u> (א) K_f/K הרחבת גלואה לא מסועפת ו- $\overline{K[\xi]}=\bar K_f$.

(ב) $\bar K_f=GF(q^f)$ וגם $f_{K_f/K}=f=[K_f:K]$.

<u>הוכחה</u> נראה ש- $\overline{K[\xi]}=GF(q^f)$, אכן, שורשי g הם $1,\xi,\ldots,\xi^{q^f-2}$
ושורשי $\bar g$ הם $1,\bar\xi,\ldots,\bar\xi^{q^f-2}$ והם שונים כי $\bar g$
ספרבילי. לכן $GF(q^f)=\langle\bar\xi\rangle\cup\{0\}$ ומכאן ש- $\overline{K[\xi]}=GF(q^f)=\bar K_f$
לבסוף $[K_f:K]=f_{K_f:K}=[\bar K_f:\bar K]=[GF(q^f):GF(q)]=f$

(ג) $K_{f_1}\subseteq K_{f_2}\iff f_1|f_2$

<u>הוכחה</u> $K_{f_1}\subseteq K_{f_2}\Rightarrow GF(q^{f_1})=\bar K_{f_1}\subseteq\bar K_{f_2}=GF(q^{f_2})\Rightarrow f_1|f_2$

ו- $f_1|f_2\Rightarrow q^{f_1}-1|q^{f_2}-1\Rightarrow x^{q^{f_1}-1}-1|x^{q^{f_2}-1}-1\Rightarrow K_{f_1}\subseteq K_{f_2}$

טענה תהי L/K הרחבה סופית של שדה מקומי K ונסמן $f=f_{L/K}$ אז $K_f \subseteq L$.

הוכחה נסמן $g=x^{q^f-1}-1$, אז $\bar{g}\in\bar{L}[x]$ ספרבילי וכל שורשי $\bar{g}$ ב-$\bar{L}$ (כי $GF(q^f)=\bar{L}$) ומהלמה של הנזל כל שורשי g ב-L, ולכן L מכיל את שדה הפיצול של g, K_f.

הערה יהי f_1 כך ש-$K_{f_1}\subseteq L$ אז $f_1=f_{K_1/K} \mid f_{L/K}=f$ ולכן $K_{f_1}\subseteq K_f$.

מסקנה K_f תת הרחבה לא מסועפת מקסימלית ב-L (מכילה כל תת הרחבה לא מסועפת של L).

מסקנה L/K לא מסועפת $\iff$ $L=K_f$ ל-f כלשהו.

הוכחה f עצמה תת ההרחבה לא מסועפת מקסימלית.

כלומר $\{$הרחבות לא מסועפות$\} = \{K_f \mid f=1,2,\dots\}$.

נסמן $L_0 (=K_f)$ תת הרחבה לא מסועפת מקסימלית. אז מכפליות f נובע $f_{L/L_0}=1$ L/L_0 מסועפת לחלוטין, מסדר $[L:L_0]=e_{L/L_0}=e_{L/K}$