W9D5
25/12/14

קוהומולוגיות

⑤ $\mathcal{O}$ בהרחבות

L/K הרחבה סופית (של שדות מקומיים) אז L שדה מקומי
ו- $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_L \cap K$.

<u>טענה</u> אם $\alpha \in \mathcal{O}_L$ אז הפול המינימלי $p_\alpha(x)$ מעל K ב-$\mathcal{O}_K[x]$.
(אותה תכונה ל- $\alpha \in \mathcal{O}_{K^{al}}$)

<u>הוכחה</u> נסמן $H = K(\alpha)$. אז המקדם הקבוע של p_α הוא $\pm N_{H/K}(\alpha)$
שמקיים $|N_{H/K}(\alpha)| = |\alpha|^{[H:K]} \le 1$ כי α שלם. ראינו מסקנה מהלמה
של הנזל (שהרי p_α אי-פריק) ש- $p_\alpha \in \mathcal{O}_K[x]$.

<u>טענה</u> $\mathcal{O}_L$ הסגור השלם של $\mathcal{O}_K$.

<u>הוכחה</u> $\mathcal{O}_L$ סגור בשלמות ולכן שלם מעל $\mathcal{O}_K$.

<u>טענה</u> יהי $f \in \mathcal{O}_K[x]$ פול' מתוקן, $p \in K[x]$ פול מתוקן. אם $p|f$
ב- $K[x]$ אז $p \in \mathcal{O}_K[x]$ ו- $p|f$ ב- $\mathcal{O}_K$.

<u>הוכחה</u> תהי L/K סופית המכילה את שורשי f, $f = \prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)$, $p = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$
ל- $0 \le n \le m$ ו- $\lambda_i \in L$. אז $\lambda_i \in \mathcal{O}_L$ ולכן מקדמי p ב- $\mathcal{O}_L \cap K = \mathcal{O}_K$.
לבסוף מאלג' החילוק נובע $p|f$ ב- $\mathcal{O}_K$.

<u>מסקנה</u> יהי $f \in \mathcal{O}_K[x]$ פול' מתוקן ו- $f = gh$ פרוק ב- $K[x]$ עם g,h
מתוקנים ב- $K[x]$. אז $g,h \in \mathcal{O}_K[x]$.

⑥ $e_{L/K} f_{L/K} = [L:K]$

<u>משפט</u> תהי ~~$[L:K]$~~ L/K הרחבה סופית, $e = e_{L/K}$, $f = f_{L/K}$.
יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_f \in \mathcal{O}_L$ כך ש- $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_f \in \bar{L}$ הם בסיס של $\bar{L}$
מעל $\bar{K}$, ויהי π_L ראשוני של L. אז $\mathcal{B} = \{\lambda_i \pi_L^j \mid 1 \le i \le f, 0 \le j \le e-1\}$
מהווה בסיס של L מעל K (ושל $\mathcal{O}_L$ מעל $\mathcal{O}_K$, בפרט $\mathcal{O}_L$ חופשי מעל $\mathcal{O}_K$).

<u>מסקנה</u> (א) כמו רק הפרק... $ef = [L:K]$.
(ב) ראינו $|\pi_L| = |\pi_K|^{1/e}$ ולכן $|N_{L/K}\pi_L| = |\pi_L|^{[L:K]} = |\pi_K|^{\frac{[L:K]}{e}} = |\pi_K|^f$

<u>הוכחה</u> $|K^\times| = \{|\pi_K|^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ו- $|L^\times| = \{|\pi_L|^n = |\pi_K|^{\frac{n}{e}} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ולכן הקוסטים $|L^\times|/|K^\times| = \{|\pi_L|^j \cdot |K^\times|\}$
שונים ל- $0 \le j \le e-1$. ראינו במשפט קודם ש- $\mathcal{B}$ בת"ל מעל K
(ובפרט מעל $\mathcal{O}_K$) ולכן די להוכיח פרישה. אבל $L = \mathcal{O}_L \cdot K$ (כי

אבל אם L/K סופית אז גם $\bar{L}/\bar{K}$ סופית ובפרט אלגברית

ולכן $\overline{K^{al}}/\bar{K}$ הרחבה אלגברית.

יתר על כן, $\overline{K^{al}}$ סגור אלגברית: אכן, יהי $g(x)=x^n+\dots+\bar{a}_0\in\overline{K^{al}}[x]$

פולינום. נרים ל- $a_i\in\mathcal{O}_{K^{al}}$. אז יש הרחבה סופית $K\subseteq L\subseteq K^{al}$ כך ש- $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathcal{O}_L$.

בנוסף קיימת הרחבה סופית $L\subseteq M\subseteq K^{al}$ ו- $\alpha\in M$ שורש של

$f(x)=x^n+\dots+a_0\in L[x]$. אז $\alpha\in\mathcal{O}_M\subseteq\mathcal{O}_{K^{al}}$ ולכן $\bar{\alpha}\in\overline{K^{al}}$ שורש של g.

<u>מסקנה</u> $\overline{K^{al}}$ סגור אלגברי של $\bar{K}$. נקבע אותו להיות <u>הסגור</u>

האלגברי של $\bar{K}$, כלומר $\bar{K}^{al}=\overline{K^{al}}$.

<u>טרנזיטיביות e,f</u> אם $K\subseteq L\subseteq M$ הרחבות סופיות אז מכפליות

אינדקסים של חבורות/דרגות של הרחבות, $e_{M/K}=e_{M/L}e_{L/K}$

ו- $f_{M/K}=f_{M/L}f_{L/K}$