

משפט 12: יהי R שדה מקומי, $R \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה נצמית, $\mathbb{C}$ שדה הממשי.

- 1- $\mathbb{C}$ הערכה מדרגית. אז לכל $a \in \mathbb{C}$ קיים פירוק יחיד

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \pi^i$$
 עם $a_i \in R$ כאשר $a_0 \neq 0$ אם $a \neq 0$.
 (אע"פ) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \pi^i = 0$.
 הוכחה: זה נקרא איבריזם של R ונראה כי π הוא פירוק יחיד.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \pi^i = 0$$

13) קומפקטיות מקומית

משפט 14: קומפקטיות של R^n

הוכחה: $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n$ ולכן מספיק להוכיח $\mathbb{R}^n$.
 נסתכן מרחב טופולוגי $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ קבוצה נצמית וזו האופי
 הקומפקטיות, אז R^n קומפקטיות.
 אבל יש לה רציפות חזרה ואם $f: R^n \rightarrow \mathbb{C}$ ו- $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$
 ולכן $\mathbb{C}$ קומפקטיות.

משפט 15: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ קומפקטיות (כ $\mathbb{C}$ קומפקטיות $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ סגורה).

13) הוכחה של המשפט

אם $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ פולינום נוסח $f(x) = \overline{a_n} x^n + \dots + \overline{a_0}$
 f נקרא פולינום אז $f \neq 0$ תמיד קבוצה קיימת $\{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$
 בהינתן f פולינום $\deg f < \deg \bar{f}$ אבל $\deg f = \deg \bar{f}$
הוכחה של המשפט יהי $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ פולינום ויהי
 פירוק $\bar{f}(x) = \overline{a_n} x^n + \dots + \overline{a_0}$ כאשר $\bar{f}$ פולינום ברצף $\bar{f} \in \mathbb{C}[x]$.
 אז קיים $f(x) = g(x)h(x)$ $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ כך $\deg g = \deg f$ ו- $\deg h = \deg f - \deg g$
 $\deg g = \deg f$ ו- $\deg h = \deg f - \deg g$ אז f מסתובב
 אז f מסתובב. הוכחה: Successive Approximation.

הוכחות

אם $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ אז $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ שדה $\mathbb{C}$
 אז קיים $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ שדה $\mathbb{C}$ כך $\deg f = n$
 הוכחה קיימת - יש פירוק $f(x) = (x - z)g(x)$ ונקרא פירוק סגור
 מובנה $(x - z)g(x) = f(x)$ כאשר z כחל $\mathbb{C}$.
 הוכחה: אם z כחל $\mathbb{C}$ אז $f(x) = (x - z)g(x)$ ו- $g(x) \in \mathbb{C}[x]$
 $f(x) = (x - z)g(x)$ ו- $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ ו- $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ ו- $g(x) \in \mathbb{C}[x]$

ב) למשל יהי $f = a_n x^n + \dots + a_0 \in K[x]$ אז $a_i \in \mathcal{O}$ $\forall i$.
 $\mathcal{O} \ni a_i$ כל, $f \in \mathcal{O}[x]$.

הוכחה על דרך השלילה. נניח $\mu = \max_i |a_i|$. יהי n מקסימלי.
 כך ל- $|a_j| = \mu$ אז $1 \leq j \leq n-1$. כעת $f \in \mathcal{O}[x]$ $\Rightarrow a_j \in \mathcal{O}$.
 ו- $\overline{a_j f} \in \overline{K}[x]$ מתוקן ממנה בדיוק j . יש פירוק טריוויאלי
 1. $\overline{a_j f} = \overline{a_j} \overline{f}$ ולכן אפי' הנכח $g(x) = \overline{a_j f}(x) = \overline{a_j}(x) \overline{f}(x)$
 2. $\deg g = j \geq 1$, $\deg h = n-j \geq 1$ ולכן $f(x) = g(x)h(x)$ פירוק
 לא טריוויאלי.

דרך 2 - הרחבות של שדות מקומיים
 3) למה יהי K שדה מקומי ו- L/K הרחבה סופית. אז $a \in L$

מקיים $|N_{L/K}(a)| \leq 1$ אז $|N_{L/K}(a-1)| \leq 1$.
 הוכחה ראשית נניח $L=K(a)$ אז הפולי' האופייני $f_a(x)$ אי' פריק
 והוא מהצורה $a^2 + \dots + N_{L/K}(a)x + 1$ ואפי' הטענה $f_a \in \mathcal{O}[x]$ אכן

כך $g(x) = f_a(x-1)$ ונתון $\mathcal{O}[x]$ ומתוקן ממנה n .
 כעת $g(x)$ הפולי' האופייני של $a-1$, ולכן $f_a(x) = g(x+1)$
 $f_a(x) = g(x+1) = x^n + \dots + N_{L/K}(a-1)x + 1$
 ולכן $|N_{L/K}(a-1)| \leq 1$.

במקרה הכללי. נסמן $H = K(a) = K(a-1)$ אז
 $N_{L/K}(a) = N_{H/K} N_{L/H}(a) = N_{H/K}(a) = (N_{H/K}(a))^{[L:H]}$
 וכן $|N_{H/K}(a)| \leq 1$ אז $|N_{L/K}(a)| \leq 1$ $\Rightarrow |N_{L/K}(a-1)| \leq 1$
 כי שכבר ראנו ולכן

$|N_{L/K}(a-1)|^{[L:H]} = |N_{L/K}(a-1)| \leq 1$

2) משפט: א שדה מקומי ו- L/K הרחבה סופית. אז קיימת
 אל L הדרגה (לא ארכימדית) ויחידה $u \in L$ שמרחיבה
 את u ויהא נטנה ϵ (*). $|x|_L = \prod_{i=1}^n |x_i|_L$ $(x \in L)$
 כאשר $[K:L] = n$. הדרגה זו היא $|x|_L$ שמה

הוכחה קיום - נגדיר ψ פונקציה אפי' (*). ברור $\psi(x) \leq \psi(y)$ ושוויון
 $\psi(x) = \psi(y)$ $\Leftrightarrow x=y$ $\forall x,y \in L$.

כחור שיהיה $\mathcal{L}$ מרחב וקטורי $\mathcal{L}$ אש וקטורי

טכניקה $\max(\varphi(x-y), \varphi(y)) \leq \varphi(x)$. אם $\mathcal{L}$ מרחב סדרה כחור וקטורי

טכניקה $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ ונמצא $\mathcal{L} = \{x \mid \varphi(x) \geq 0\}$. מכאן $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ וקטורי

$1 \leq \alpha \leq \infty$. מהלכה $\varphi(x) = \frac{\varphi(x-y)}{\varphi(y)} \leq 1$ עבור $\varphi(x) = \max(\varphi(x-y), \varphi(y))$

אם φ הדרגה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

חידוש $\mathcal{L}$ הדרגה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

וקטורי $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

אם $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

כחור $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

אם $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

אם $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

אם $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

טכניקה $\mathcal{L}$ מהלכה $\mathcal{L}$ אולי.

③ הרחבת

א שדר מקוא 1-1.1 ההצרכה של al , $al \subseteq L \subseteq K$ הרחקה סופית.

מכאן אפשר לראות כי ρ, θ, φ הם פונקציות של r ו- ϕ בלבד, ו- ρ, θ, φ הם פונקציות של r ו- ϕ בלבד.

$K \rightarrow \bar{L} \rightarrow \bar{K}^{\text{el}}$ — יוצא על פניו' קצת פחות $P_K^{\#}, U_K$ — ✓ נכנס
 $P \rightarrow \pi + P \rightarrow \pi + P_{\text{el}}$ ($x \in P_K$) — — — — —

מקור ודק חתום וחסות זליר בעלות
 $x \rightarrow P_k \rightarrow x \rightarrow P_L \rightarrow x \rightarrow P_{k+1} \quad (x \in \theta_k)$

$$|K^*| \subset |L^*| \subset |K^{al*}| \quad \text{for } (K, L) \text{ normal}$$

$$\begin{array}{ccccc} \overline{K} & \subseteq & \overline{L} & \subseteq & \overline{K^{al}} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_K & \subseteq & \mathcal{O}_L & \subseteq & \mathcal{O}_{K^{al}} \end{array}$$

$$\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_L \subseteq \mathcal{O}_{K^{al}}$$

e, f (4)

משפט יהי A שדה מקומי, L/K הרחבה סופית, $z_1, \dots, z_k \in L^*$ יהיו

$$a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{Q}_\ell^* \quad \text{p'JIC} \quad |z_1|/|k^*|, \dots, |z_\ell|/|k^*| \in \mathbb{Q}_\ell^*/|k^*| \quad p' \text{colp} \quad |k^*| - \eta \text{ l} \quad \text{pD}$$

כך, $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\ell \in \bar{L}$ ה"ת מסל $\bar{K}$. SK . $\bar{K}$ $\{a_i, z_j\}_{i=1, j=1}^{\ell, h}$

$kl \in \mathbb{Z}: k \in \mathbb{N}$ ය

חברה ה'ו $\epsilon^k \#_{j \in C} a$ כולם 0 ונאכ' $\sum_{j \in A} z_j = 0$. אפשר /ת'ם

$$-e \leq i(j) \leq e \quad \text{und} \quad c_{ij} \neq 0 \quad -e \leq i \leq e \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\frac{c_{ij}}{c_{(j),j}} \in \mathcal{O}_K \quad -1 \leq j \leq r \quad \left\{ \frac{c_{ij}}{c_{(j),j}} a_i \in \mathcal{O}_K \quad \text{s.t.} \quad |c_{(j),j}| = \max_i |c_{i,j}| \neq 0 \right.$$

$$\frac{\overline{C_{ij}}}{\overline{a_{i1}} \dots \overline{a_{in}}} = i(j) - \int \dots$$

O_L (כ) $\bar{a}_i$ סת"ל וכן הנומרה $\bar{a}_i$ הסבס $\bar{a}_i$ היל 1

$$w_j = \begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{i,j} \\ \vdots \\ c_{n,j} \end{pmatrix} z_j \quad \text{now, find } \left| \sum_{i=1}^n c_{i,j} a_i \right| = |c_{i,j}|, j \in K^* \quad - \text{e} \quad |K| \geq N$$
$$s_k \quad |k| \quad |z_j| \in |w_j| \quad \text{ולכן יש להם מרחאות שוות, ולכן} \quad \bar{z}_j \neq 0$$

על e, f שֶׁ $f = f_{L/K} = [L:K]$, $e = e_{L/K} = |L^*| \cdot |K^*|$ מכאן (כִּי מכאן

$$ef \leq [L:k] - 1$$

ב) למעשה יפ' א שבר מקומ', L/α החומר סופר, L

שנה מקומי עם הרחבת הקצרה

$\text{sup } \|f_k\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq L \|u_k\|_{L^{\infty}(\Omega)}, f_k \in C_c^\infty(\Omega), \|f_k\|_{L^{\infty}(\Omega)} < \infty$

$$S_k \quad \gamma = (T_k | \epsilon(0, \infty)) \quad \text{of} \quad \sqrt{\left(\frac{1}{k^*} : |k^*| \right)} = e^{\infty} \quad \text{of} \quad \gamma \quad \gamma \quad \gamma$$

$$|\pi_L| = |\pi_k|^{1/e} \leq L \text{ and } \pi_L \text{ odd} \quad |L^*| = \{x^{1/e} \mid e \in \mathbb{Z}\}$$

$$\therefore (\overline{K})^{al} \quad (4)$$

$\frac{K_{\text{Kal}}}{L/K} = U \cdot \frac{K_{\text{Kal}}}{L/K}$, $\frac{K_{\text{Kal}}}{L/K} = U \cdot \frac{K_{\text{Kal}}}{L/K}$. K

אבל אם L/K סופית אז גם $\bar{L}/\bar{K}$ סופית וברורה אלגבריות
 ולכן $\bar{K}/\bar{K}^{al}$ הרחבה אלגברית.

יתר על כן, $\bar{K}^{al}$ סגור אלגברית. לכן, יהי $f(x) = x^n + \dots + a_0 \in L[x]$
 מונומיאלי - L^{al} . אז יש הרחבה סופית $L^{al} \subseteq K \subseteq L$ כך ש- $L^{al} = L[x_1, \dots, x_n]$.
 בנוסף קיימת הרחבה סופית $L \subseteq M \subseteq K$ ו- $a \in M$ שיהיה $\bar{K}^{al}$

$[x] \in L[x] = x^n + \dots + a_0$. אז $\alpha \in \bar{K}^{al}$ וכן $\bar{K}^{al} \in \bar{K}^{al}$ שיהיה $\bar{K}^{al}$
 מסקנה $\bar{K}^{al}$ סגור אלגברית של K . נקבע אולי להיות הסגור
 האלגברית של K כלומר $\bar{K}^{al} = \bar{K}^{al}$.

למשל: $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ אז $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq M$ הרחבות סופיות אז מכפלות
 אינדקסים של חבורות / דגור של הרחבות $e_{MK} = e_{ML} e_{LK}$
 ו- $f_{MK} = f_{ML} f_{LK}$.