W8D5

18/12/14

קוהומ'

המשך - שדות מקומיים

1) אם $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ טור, נסמן $S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$. אז הטור מתכנס ל-x אם"ם $\lim_{n\to\infty} S_n = x$

2) במצב כזה בהכרח $\lim_{k\to\infty} x_k=0$ ובפרט קיים $\max_k |x_k|$.

3) $|x| \le \max_k |x_k|$ $(|x|=\lim|S_n| \le \max_k |x_k|)$.

4) אם $\forall i\ |x_1|>|x_i|$ אז $|x|=|x_1|\neq 0$.

5) שלמות - סדרת קושי $\Leftrightarrow$ מתכנסת.
(תמיד נכונה לא ארכימדי)

מינוח: שדה הערכה $\{K,|\cdot|\}$ נקרא שלם אם הוא שלם ביחס למטריקה הקנונית עליו $d(x,y)=|x-y|$.

תכונה: אם K שלם אז $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ מתכנס אם"ם $\lim_{k\to\infty} x_k=0$
כי אם $|x_n|\le\varepsilon$ לכל $m\ge n$ אז $|S_n-S_m|\le\varepsilon$ כלומר
זו סדרת קושי ולכן מתכנסת.

מרחבים נורמיים

יהי $\{K,|\cdot|\}$ שדה הערכה. מ"ו נורמי V מעל K הוא מ"ו מעל K
עם פונ' $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$ כך ש-

1) $\|v\|\ge 0$ ושוויון אם"ם $v=0$. שוב, נובעת מטריקה $d(v,w)=\|v-w\|$

2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\|$.

3) $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$.

טענה: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל K, כאשר K שדה הערכה שלם.
יהי $v_1,\dots,v_n$ בסיס ל-V.

א) $\|x_1v_1+\dots+x_nv_n\|=\max_k|x_k|$ נורמה.

ב) כל 2 נורמות על V שקולות, $A^{-1}\|v\|_1\le\|v\|_2\le A\|v\|_1$

ג) כל נורמה על V הופכת את V למרחב מטרי שלם.

ד) אם $V\subset U$ ו-U מרחב נורמי מעל K, V סגור ב-U.

לא נוכיח, קל לבדוק.

חוג השלמים

הגדרה: $O=\{x\in K \mid |x|\le 1\}$. אז O חוג הנקרא חוג השלמים של K.

תכונות

① k שדה המנות של O.

② O תחום שלמות (סגור בשלמות):

אכן, נניח $x\in k$ שלם מעל O, $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$ $(a_i\in O)$.

אם $|x|>1$ נקבל $|a_{n-1}x^{n-1}|<|x^n|$ וכו' בסתירה.

נסמן $U=\{x\in k \mid |x|=1\}$.

③ $U=O^\times$ תת חבורה של $k^\times$.

④ $\varphi=\{x\in k \mid |x|<1\}=O\setminus U$ אידיאל מקסימלי יחיד ב-O.

<u>הגדרה</u> $\bar{k}=O/\varphi$ נקרא שדה השאריות של k.

יש הומו' שארית $O\to\bar{k} : x\mapsto x+\varphi$.

תכונה - $|x_1-x_2|=1 \iff \bar{x}_1=\bar{x}_2$ $(x_1,x_2\in O)$.

<u>נציגים</u> תת קבוצה $R\subseteq O$ כך ש- $R\to\bar{k}$ חח"ע ועל, נקראת קבוצת נציגים. בד"כ ניקח $0\in R$.

<u>דיסקרטיות</u>

שדה הערכה נקרא דיסקרטי אם קיים $\pi\in k^\times$ כך שלכל $x\in k^\times$ יש פירוק $x=\pi^n u$ (*) ל- $u\in U, n\in\mathbb{Z}$.

<u>הערות</u>: ① אפשר להניח $|\pi|<1$ כי $|\pi|\neq 1$ (ו-$|\cdot|$ לא טריוויאלי) ונוכל להחליף π^{-1} ב- π. π עם תכונה זו נקרא <u>ראשוני</u> של k.

② n - (*) נקבע $|x|=|\pi|^n$ ולכן u,n קבועים ביחידות.

③ לכן $k^\times\cong\langle\pi\rangle\times U\cong\mathbb{Z}\times U$ איז'.

④ $|\pi|=\max\{|x| \mid |x|<1\}$.

<u>הגדרה</u> שדה p-אדי הוא (עד שקילות של) שדה הערכה (לא ארכימדי) $\{k,|\cdot|\}$ <u>שלם</u>, <u>דיסקרטי</u>, עם <u>שדה שאריות סופי</u>.

שדה מקומי - p אדי / $\mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$. בפועל לא נתעסק ב- $\mathbb{R},\mathbb{C}$ ולכן נקרא כך רק ל-p-אדיים.

$\text{char}\,\bar{k}=p$.

<u>מציינים</u> יש 2 אפשרויות -

א) $\text{char}\,k=0$ מקרה של "מציינים שונים"/"שדה מספרים".

דוגמה - $\mathbb{Q}_p$ השלמה של $(\mathbb{Q}, H_p)$ כאשר $\left|\frac{a}{b}p^m\right| = \frac{1}{p^m}$

ו- a,b זרים ל-p.

אם $\mathrm{char}\, K = \mathrm{char}\, \bar{K} = p$, מקרה של "מצ"ים שווים"/"שדה פונקציות".

דוגמה - טורי לורן $\sum_{N}^{\infty} a_n x^n$ ו-$a_n \in GF(p^l)$ שדה סופי.

הערכה מעריכית

נחזור לפירוק $K^\times \cong \langle\pi\rangle \cdot U \cong \mathbb{Z}\times U$. אז מוגדרת $v: K^\times \to \mathbb{Z}$

לפי $|x| = |\pi|^{v(x)}$ (לא תלוי ב-π כי הנורמה שלו קבועה).

תכונות

① $v(xy) = v(x) + v(y)$

② $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$

③ $\mathrm{Im}\, v = \mathbb{Z}$.

פורמלית נהוג שמוסיפים $v(0)=\infty$

v עם תכונות אלה נקראת הערכה מעריכית.

מהינתן הערכה מעריכית ניתן לקחת $1 >$ [illegible] ולהגדיר $|x| = r^{v(x)}$

ולקבל הערכה.

יש סדרה מדויקת $1 \to U \hookrightarrow K^\times \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$

תיאור הערכה דיסקרטית

מאינפי' 1 - $\Gamma \subseteq (0,\infty)$ תת חבורה (לפי כפל). תנאים שקולים:

① $\Gamma \cong (\mathbb{Z},+)$ כחבורה.

② $\Gamma = \{r^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ל- $0 < r < 1$ כלשהו.

③ אם $r = \sup\{t \mid t<1, t\in\Gamma\}$ אז $r<1$.

אותו r!

④ יש $\varepsilon > 0$ כך ש- $\Gamma \cap (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = \{1\}$.

⑤ הטופ' המושרית על Γ היא דיסקרטית.

r - היוצר היחיד של Γ ב-$(0,1)$.

חבורת ההערכה $|K^\times| \subset (0,\infty)$

טענה K דיסקרטי $\Leftrightarrow$ $|K^\times|$ דיסקרטי במובן של ⑤.

אם ניקח כמו ב-③, ② אז π ראשוני $\Leftrightarrow$ $|\pi| = r$.

מסקנה אם π ראשוני $\{\text{איברים ראשוניים}\} = \pi U = \{x \in K^\times \mid |x| = |\pi|\}$