W8D3

16/12/14

קוהומ'

פרק 13 - שימוש בהצגת מימד למכפלות ∪

① דוגמא: טענה: $\Gamma < G$, A,B G-מודולים, אז $\mathrm{cor}(\alpha \cup \mathrm{res}\, b) = \mathrm{cor}(\alpha)\cup b \in H^{p+q}(G, A\otimes B)$ כאשר $\alpha\in H^p(\Gamma,A)$, $b\in H^q(G,B)$ וה-res מ-G ל-Γ (וה-cor להיפך).

הוכחה: נבדוק ל-$p=q=0$. יהיו $x\in A^\Gamma$, $y\in B^G$ כך ש-$b=\mathcal{N}_G(y)$ ו-$\alpha\in \mathcal{N}_{\Gamma}(x)$. אז $\mathrm{cor}(\alpha\cup \mathrm{res}\, b)=\mathrm{cor}(\mathcal{N}_\Gamma(x)\cup \mathcal{N}_\Gamma(y))$ זה בדיוק $\mathrm{cor}(\mathcal{N}_\Gamma(x\otimes y)) = \mathcal{N}_G(x\otimes y) = \mathcal{N}_G(\mathcal{N}_{G/\Gamma}(x)\otimes y)$ זה $\mathrm{cor}(\mathcal{N}_\Gamma(x))\cup \mathcal{N}_G(y) = \mathrm{cor}(\alpha)\cup\beta$.

נוכיח שהיא נכונה לשינויים $p\to p\pm1$, $q\to q\pm1$

אינד' בחס ל-p - נתייחס לסדרה ~~מדויקת~~ Z-מתפצלת מדויקת של G-מודולים (דומה-q)

Ⓘ $0\to A_1\to M\to A_2\to 0$ כאשר M מושרה ומפרק ט' קוהומ' (קיימת כזו עם $A_1=A$ / $A_2=A$). אז לכל p $\delta_I^\Gamma: H^p(\Gamma,A_2)\to H^{p+1}(\Gamma,A_1)$ איזו'. נסמן התאמה חח"ע ועל ע"י $\delta_I^\Gamma(\alpha_2)=\alpha_1$. כמו כן, הסדרה

Ⓘⅈ $0\to A_1\otimes B\to M\otimes B\to A_2\otimes B\to 0$ מתפצלת מעל G ומכאן $M\otimes B$ מושרה ⟸ ט' קוהומ'. לכן גם δ_{II}^G איזו'.

$$\delta_{II}^G(\mathrm{cor}(\alpha_2\cup \mathrm{res}\, b)) = \mathrm{cor}(\delta_{II}^\Gamma(\alpha_2\cup \mathrm{res}\, b)) = \mathrm{cor}(\delta_I^\Gamma\alpha_2\cup \mathrm{res}\, b) = \mathrm{cor}(\alpha_1\cup \mathrm{res}\, b)$$

$$\delta_{II}^G(\mathrm{cor}\,\alpha_2\cup b) = \delta_I^G(\mathrm{cor}\,\alpha_2)\cup b = \mathrm{cor}\,\alpha_1\cup b$$

לכן הטענה תקפה ל-α_1 ⟸ ל-α_2. לכן הטענה ל-p ⟸ הטענה ל-p±1. הקודמה ל-q דומה.

② תכונות המתקבלות ע"י הצגת מימד:

ⓐ יהיו A,B,C G-מודולים, $a\in H^p(G,A)$, $b\in H^q(G,B)$, $c\in H^r(G,C)$.

1) $(x\cup y)\cup z = x\cup(y\cup z)$ כאשר מזהים קוהומ' של $A\otimes(B\otimes C)$, $(A\otimes B)\otimes C$

2) $x\cup y = (-1)^{pq}\, y\cup x$ עם זיהוי הדומה $A\otimes B, B\otimes A$.

ⓑ A,B G-מודולים, $\alpha\in H^p(\Gamma,A)$, $\beta\in H^q(\Gamma,B)$, $a\in H^p(G,A)$, $b\in H^q(G,B)$

אז 1) $\mathrm{res}(a\cup b) = \mathrm{res}\, a\cup \mathrm{res}\, b$

2) א) $\mathrm{cor}(\alpha\cup\mathrm{res}\, b) = \mathrm{cor}\,\alpha\cup b$

ב) $\mathrm{cor}(\mathrm{res}\, a\cup b) = a\cup\mathrm{cor}\, b$

ⓒ יחידות: קיימת סדרה יחידה של $\cup: H^p(G,A)\otimes H^q(G,B)\to H^{p+q}(G,A\otimes B)$

כך ש-① $\cup$ פונקטוריאלי ב-A, B.

② $\chi(a)\cup\chi(b)=\chi(a\cup b)$

③ אם (I) $0\to A\to B\to C\to 0$ $\mathbb{Z}$-מתפצלת ו-M G-מודול

נניח $\mu\in H^p(M), \gamma\in A^q(C)$, אז ביחס ל- (I)' $0\to A\otimes M\to B\otimes M\to C\otimes M\to 0$

מתקיים $\delta(\gamma\cup\mu)=\delta\gamma\cup\mu$, ובדומה ל- (II)'' $0\to M\otimes A\to M\otimes B\to M\otimes C\to 0$

מתקיים $\delta(\mu\cup\gamma)=(-1)^p\mu\cup\delta\gamma$

נניח $\tilde{\cup}$ מכפלה נוספת. אז $\delta(a_2\,\tilde{\cup}_{pq}\, m)=\delta a_2\cup m=a_1\cup_{p+1,q} m$

ולכן $\tilde{\cup}_{pq}=\cup_{pq}$ אם יש שוויון בדומה ל-$p\pm1$, וכנ"ל ל-q בדומה.

מספיק לוודא ב-0 ושם זה ברור מ-② שיש שוויון.

④ יהי A G-מודול ו-$a\in A^G$, נסמן $x=\bar a=\chi(a)\in H^0(A)$, אז

לכל G-מודול B יש $\mathbb{Z}$-הומ' $\varphi_a: B\to A\otimes B,\ b\mapsto a\otimes b$ ו-$\psi_a: B\to B\otimes A,\ b\mapsto b\otimes a$

אז לכל $y\in H^q(G,B)$ מתקיים $\bar a\cup y=x\cup y=H^q(G,\varphi_a)(y)$

$y\cup\bar a=y\cup x=H^q(G,\psi_a)(y)$.

לדוגמה, אם $A=\mathbb{Z}$ וניקח $B\otimes\mathbb{Z}=B=\mathbb{Z}\otimes B$ אז $\psi_n=\varphi_n=n\cdot Id_B$

לכן $H^p(G,\varphi_n)=H^p(G,\psi_n)=n\cdot Id_{H^p(G,B)}$. לכל $n\in\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^G$, $\chi(n)=\bar n\in H^0(G,\mathbb{Z})$ ו-

$\bar n\cup\beta=n\beta=\beta\cup\bar n\in H^p(G,B)$ ובפרט $\bar 1\cup\beta=\beta=\beta\cup\bar 1$

פרק 14 - חישובי $\cup$ יחד עם $G/G'\cong\hat H^{-2}(G,\mathbb{Z})$ ומשפט ט"ט

① טענה - A G-מודול, $a: G^2\to A$ קוציקלוס המייצג $\alpha\in\hat H^2(G,A)$.

אז לכל $\sigma\in G$ מתקיים

$$\xi_\sigma\cup\alpha=\alpha\cup\xi_\sigma=\overline{\sum_\tau a(\tau,\sigma)}=\nu_\alpha(\sigma G')\in\frac{A^G}{N_G A}\cong\hat H^0(G,A)$$

בדיקה: יהי A' המודול המפצל של α. אז יש סדרה מדויקת

(II) $0\to A\to A'\to I_G\to 0$ ע"ס (I) $0\to I_G\to\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}\to 0$ כך ש- $\alpha=\delta_{II}\delta_I\bar 1$

ניקח $\xi_\sigma\in\hat H^{-2}(G,\mathbb{Z})$ וניקח $\otimes\mathbb{Z}$ של (I),(II). נקבל אותן

סדרות (ובפרט הן נשארות מדויקות) $\alpha\cup\xi_\sigma=(\delta_{II}\delta_I\bar 1)\cup\xi_\sigma=\delta_{II}\delta_I(\overset{\xi_\sigma}{\bar 1\cup\xi_\sigma})$

ואת בדיוק הזהות נקימה $\nu_\alpha(\sigma G')=\overline{\sum_\tau a(\tau,\sigma)}$:

② קרקטרים

תזכורת $\widehat{G/G'}=\hat G=Hom_{group}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. $0=(df)(\sigma,\tau)=\sigma\overbrace{f(\tau)}^{f(\tau)}-f(\sigma\tau)+f(\sigma)$

ומאחר שאין מנות אפשר לרשום $\bar\chi=\chi$. נסמן $n=|G|$ ונסתכל

בסדרה (I) $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$, אז מוגדר $\delta\chi\in H^2(G,\mathbb{Z})$.

מצד שני $\forall\sigma\in G,\ \chi(\sigma)\in\frac{\frac{1}{n}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}\subseteq\underbrace{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}_{\text{מזוהה עם}}$ ולכן ניתן להגדיר $n\chi(\sigma)\in\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

לבסוף, זה $H^0(G,\mathbb{Z})$ ולכן $\overline{n\chi(\sigma)}=\overline{\Omega}\in H^0(G,\mathbb{Z})$.

<u>תכונה</u> $\overline{n\chi(\sigma)}=(\delta\chi)\cup\xi_\sigma\in H^0(G,\mathbb{Z})$.

<u>בדיקה</u> נבנה $\delta\chi$. תהי $\chi_{\mathbb{Q}}:G\to\mathbb{Q}$ כך ש-

$\chi_{\mathbb{Q}}(\tau)+\mathbb{Z}=\chi(\tau)\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אז $\operatorname{Im}\chi_{\mathbb{Q}}\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}$, $\overline{n\chi_{\mathbb{Q}}(\tau)}=n\chi_{\mathbb{Q}}(\tau)+n\mathbb{Z}=\overline{n\chi(\tau)}$

נגזור את $\chi_{\mathbb{Q}}$ – $(d\chi_{\mathbb{Q}})(\tau,\rho)=\chi_{\mathbb{Q}}(\tau)+\chi_{\mathbb{Q}}(\rho)-\chi_{\mathbb{Q}}(\tau\rho)\in\mathbb{Z}$

ונקבל פונקציה $G^2\to\mathbb{Z}$ שמייצגת ע"י $\delta\chi$, כזת

$\delta\chi\cup\xi_\sigma$ נתון ע"י נקימה $(\delta\chi)\cup\xi_\sigma=\sum_\tau\chi_{\mathbb{Q}}(\sigma)+\cancel{\chi_{\mathbb{Q}}(\tau)-\chi_{\mathbb{Q}}(\tau\sigma)}=$

$\overline{n\chi_{\mathbb{Q}}(\sigma)}=\overline{n\chi(\sigma)}$.

<u>משפט ט"נ</u> יהי A G-מודול מחלקה עם איבר יסודי α.

כלומר $\forall\Gamma<G$ – ו $H^1=0$, H^2 ציקלית מסדר $|\Gamma|$,

α יוצר את $H^2(G)$ וראינו ש-$\operatorname{res}\alpha$ יוצר את $H^2(\Gamma)$).

אז לכל $\Gamma<G$ ו- $n\in\mathbb{Z}$, $(\operatorname{res}\alpha)\cup\cdot:H^n(\Gamma,\mathbb{Z})\to H^{n+2}(\Gamma,A)$ איזו' של ח' חילופיות.

<u>הוכחה</u> A כ-Γ מודול הוא מודול מחלקה עם איבר יסודי $\operatorname{res}\alpha$.

לכן די להוכיח ל-G. נשתמש בסדרות:

(I) $0\to I_G\to\mathbb{Z}[G]\to G\to 0$

(II) $0\to A\to A'\to I_G\to 0$

[A' המודול המפצל של α].

כך ש- $\alpha=\delta_{II}\delta_I 1$ ולכן לכל $\gamma\in H^n(G,\mathbb{Z})$,

$\alpha\cup\gamma=\delta_{II}\delta_I(1\cup\gamma)=\delta_{II}\delta_I\gamma$ אבל $\delta_{II}\delta_I$ איזו'

(כי $\mathbb{Z}[G]$ מושרה ו-A' ל' קוהומ') ולכן זה איזו'.

<u>מקרה $n=-2$</u> באותן הנחות $G/G'\cong H^{-2}(G,\mathbb{Z})\to H^0(G,A)=\frac{A^G}{N_GA}$.

$\sigma G'\xrightarrow{\cup}\xi_\sigma\longrightarrow\alpha\cup\xi_\sigma=\cancel{Y}(\sigma)=\sum_\tau f(\tau,\sigma)$

כאשר f קוציקלוס המייצג את α. קיבלנו את הזהות נקימה.

בכיוון ההפוך נקבל:

<u>תיאור הפוך בכיוון ההפוך בעזרת קרקטרים</u>

יהי A מודול מחלקה עם איבר יסודי α. אז יש לנו הה'

$$A^G\xrightarrow{\kappa}\frac{A^G}{N_GA}\cong H^0(G,A)\xrightarrow{(\alpha\cup\cdot)^{-1}}H^{-2}(G,\mathbb{Z})\cong G/G'$$

$$\alpha\cup\xi_\sigma\longleftarrow\xi_\sigma\longleftarrow\sigma G'$$

כלומר $(a,G)=\sigma G'$ מאופיין ביחידות ע"י $H^0(G,A)\ni\bar{a}=\overline{\kappa(a)}=\alpha\cup\xi_\sigma$

טענה בסימונים לעיל, $\chi \in \hat{G} = \widehat{G/G'}$ $(|G|=n)$, מתקיים $(a\in A^{K})\ \delta\chi \cup \bar{a} = \overline{(n\,\chi(a,G))}\alpha$

הוכחה נסמן $(a,G)=\sigma G'$. אז $\bar{a}=\alpha\cup\xi_\sigma=\xi_\sigma\cup\alpha$ (2- כוכב) ולכן

$(\delta\chi)\cup\bar{a}=(\delta\chi)\cup(\xi_\sigma\cup\alpha)$ וזה $(\delta\chi\cup\xi_\sigma)\cup\alpha=\overline{(n\,\chi(\sigma))}\alpha=\overline{n\chi(\sigma G')}\alpha=\overline{n\chi(a,G)}\alpha$.

Newkirch - ...
Weiss - Alg. Num. Theory

פרק 15 - שדות מקומיים

① **הגדרה**: ערך מוחלט (או הערכה) לא ארכימדי על שדה K

היא $|\cdot|: K \to \mathbb{R}$ כך ש-

א) $|x|\geq 0$ ושוויון אם"ם $x=0$.

ב) $|xy|=|x|\cdot|y|$.

ג) $|x\pm y| \leq \max(|x|,|y|)$.

ד) אי טריוויאלית - קיים x כך ש- $|x|\neq 1$.

② **מסקנות**

$|\pm 1|=1$, $|-x|=x$, $|x^{-1}|=|x|^{-1}$ $(x\neq 0)$, $\exists x,\ 0<|x|<1$, $\exists y,\ |y|>1$.

$||x|-|y|| \leq |x\pm y| \leq |x|+|y|$ ומקבלים מטריקה $d(x,y)=|x-y|$ כך

ש- $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, ובאופן כללי $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x \iff \lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$

1) $|x-y|\leq\max(|x-z|,|y-z|)$, כל משולש הוא שווה שוקיים

2) אם $|x|>|y|$ אז $|x\pm y|=|x|$.

$|x|$; $|y|$; $x\pm y$; $|x|$ בהכרח ; 0

3) $|\pm x_1 \pm x_2 \ldots \pm x_n| \leq \max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$

4) יהי $s=x_1\pm\ldots\pm x_n$.

א) $|x_{i_0}|>|x_i|\ \ \forall i\neq i_0\ \ \exists i_0$ אז $|s|=|x_{i_0}|\neq 0$.

ב) $s=0$ אז $\max|x_i|$ מתקבל ב- 2 איברים לפחות.

5) פעולות חיבור, כפל והופכי הן רציפות.

6) ל- $s>0$, $x\to|x|^s$ גם הערכה לא ארכימדית

(ויתר על כן, נורמה שקולה - מגדירה אותה טופולוגיה).

③ **הערכות שקולות**

בהינתן $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ הערכות לא ארכימדיות, אז הן שקולות

אם $\exists s\in\mathbb{R}\ \ |x|_1^s=|\cdot|_2$ (s יחיד מא"י-טריוויאליות)

טענה ~~[illegible]~~ הן שקולות אם"ם הן מגדירות אותה טופו',

או לכך שאחת קטנה/גדולה מ-1 אם"ם השניה, שההעתקה

בין שניהם רציפה הוא.