W7D5
11/12/14

קחמ'

הערה על $H^0(G,\mathbb{Z})=\frac{\mathbb{Z}}{|G|\mathbb{Z}}$. ניקח $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ ע"י $m\otimes n=mn$.

נשתמש ב- $\varkappa:\mathbb{Z}\overset{\varepsilon}{=}\mathbb{Z}\to H^0(G,\mathbb{Z})$. מהתנאי $\varkappa(m)\cup\varkappa(n)=\varkappa(m\otimes n)=\varkappa(mn)$

כפלית והיא על ולכן מעבירה יחידה ליחידה ולכן הומ'

של חוגים (כשהכפל ב- $H^0(G,\mathbb{Z})$ נתון ע"י המכפלה ב- $H^0(G,\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z})$)

$\ker\varkappa=|G|\mathbb{Z}$ ולכן $\frac{\mathbb{Z}}{|G|\mathbb{Z}}=H^0(G,\mathbb{Z})$.

בניית $\varphi=\{\varphi_{p,q}\}_{p,q\geq0}$ עבור הקומפלקס הסטנדרטי

נשתמש ב- $Y_n=\mathbb{Z}[G]^{\otimes n+1}$ ו- G פועל על כל רכיב.

$$\cdots\longrightarrow Y_1\xrightarrow{\partial_1}Y_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to0$$

כאשר $\partial_n(\sigma_0\otimes\cdots\otimes\sigma_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\sigma_0\otimes\cdots\hat{\sigma_i}\otimes\cdots\otimes\sigma_n)$.

נגדיר $\varphi_{p,q}:Y_{p+q}\to Y_p\otimes Y_q$ ל- $p,q\geq0$ ע"י $\varphi_{0,0}(\sigma)=\sigma\otimes\sigma$,

$\varphi_{p,q}(\sigma_0\otimes\cdots\otimes\sigma_{p+q})=(\sigma_0\otimes\cdots\otimes\sigma_p)\otimes(\sigma_p\otimes\cdots\sigma_q)$ G-המ'.

בדיקה $(\varepsilon\otimes\varepsilon)\varphi_{0,0}(\sigma)=(\varepsilon\otimes\varepsilon)(\sigma\otimes\sigma)=1_{\mathbb{Z}}\otimes1_{\mathbb{Z}}\overset{\text{זיהוי}}{=}1_{\mathbb{Z}}=\varepsilon(\sigma)$ ולכן $\varepsilon=(\varepsilon\otimes\varepsilon)\circ\varphi_{0,0}$.

ל- $\alpha=\sigma_0\cdots\otimes\sigma_{p+q+1}$, $\varphi_{p,q}\partial=\partial'\circ\varphi_{p+1,q}+(-1)^p\partial''\varphi_{p,q+1}$

$$(\partial'\varphi_{p+1,q}+(-1)^p\partial''\varphi_{p,q+1})\alpha=[\partial(\sigma_0\cdots\otimes\sigma_{p+1})]\otimes[\sigma_{p+1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{p+q+1}]+$$
$$(-1)^p[(\sigma_0\cdots\otimes\sigma_p)\otimes[\partial(\sigma_p\otimes\cdots\otimes\sigma_{p+q+1})]]=\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i(\sigma_0\otimes\cdots\hat{\sigma_i}\cdots\otimes\sigma_{p+1})\otimes(\sigma_{p+1}\cdots\otimes\sigma_{p+q+1})+$$
$$(-1)^p\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j(\sigma_0\otimes\cdots\otimes\sigma_p)\otimes(\sigma_p\otimes\cdots\otimes\hat{\sigma}_{p+j}\cdots\otimes\sigma_{p+q+1}).$$

נשים לב ש- $i=p+1$ ו- $j=0$ מבטלים זה את זה. נציב $k=j+p$

ונקבל

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\sigma_0\otimes\cdots\otimes\hat{\sigma_i}\otimes\cdots\otimes\sigma_{p+1})\otimes(\sigma_{p+1}\cdots\otimes\sigma_{p+q+1})+$$
$$\sum_{k=p+1}^{p+q+1}(-1)^k(\sigma_0\otimes\cdots\otimes\sigma_p)\otimes(\sigma_p\otimes\cdots\otimes\hat{\sigma}_k\otimes\cdots\sigma_{p+q+1})=\varphi_{p,q}(\partial\alpha).$$

תאור ע"י G-בסיסים קנוניים

(I) $[\cdot]=1_G\in\mathbb{Z}[G]=Y_0$ ולכן $\varphi_{0,0}([\cdot])=[\cdot]\otimes[\cdot]$.

(II) ל- $n\geq1$, $[\sigma_1,\dots,\sigma_n]=1_G\otimes(\sigma_1)\otimes\cdots\otimes(\sigma_1\cdots\sigma_n)\in Y_n$ ולכן אם $n=p+q$

$$\varphi_{p,q}[\sigma_1,\dots,\sigma_n]=[\sigma_1,\dots\sigma_p]\otimes(\sigma_1\cdots\sigma_p)[\sigma_{p+1},\dots,\sigma_{p+q}]$$

בפרט

$$\varphi_{0,q}[\sigma_1\dots\sigma_q]=[\cdot]\otimes[\sigma_1,\dots\sigma_q]$$

$$\varphi_{p,0}[\sigma_1,\dots,\sigma_p]=[\sigma_1,\dots\sigma_p]\otimes(\sigma_1\cdots\sigma_p)[\cdot]$$

תיאור בעזרת שרשראות

א. יהיו $p,q\geq 1$ ואם $\alpha\in H^p(A)$ מיוצג ע"י $f:G^p\to A$, $\beta\in H^q(B)$ מיוצג ע"י $g:G^q\to B$. אז $\alpha\cup\beta$ מיוצג ע"י $h:G^{p+q}\to A\otimes B$

$$h(\sigma_1,\dots,\sigma_{p+q})=f(\sigma_1,\dots,\sigma_p)\otimes(\sigma_1\cdots\sigma_p)\,g(\sigma_{p+1},\dots,\sigma_{p+q})$$

ב. אם $c\in C^G$ כאשר C G-מודול ו- $\varkappa(c)=\bar{c}\in \hat{H}^0(C)$, אז $\alpha\cup\gamma$
ב- $H^0(A\otimes C)$ מיוצג ע"י $(\sigma_1,\dots,\sigma_p)\to f(\sigma_1,\dots,\sigma_p)\otimes(\sigma_1\cdots\sigma_p)(c)$
ו- $\gamma\cup\beta$ ע"י $(\sigma_1,\dots,\sigma_q)\to c\otimes g(\sigma_1,\dots,\sigma_q)$

ג. $\varkappa(x)\cup\varkappa(y)=\varkappa(x\cup y)$ מקרה דרגה 0

<u>יישום לאינפלציה</u> $\Gamma\lhd G$ נורמלית ו- A G-מודול, אז
לכל $a\in A^G\in(A^\Gamma)^{G/\Gamma}$ מתקיים $\varkappa_G(a)=a+N_GA\in\hat{H}^0(G,A)$
ו- $\varkappa_{G/\Gamma}(a)=a+N_{G/\Gamma}A^\Gamma\in\hat{H}^0(G/\Gamma,A^\Gamma)$.

<u>תכונות</u> ל- G-מודולים A,B נסמן $\inf=\inf_{G/\Gamma\to G}$. אז:

א. $\inf(\alpha\cup\beta)=\inf(\alpha)\cup\inf(\beta)$,

ב1. $(\inf\beta)\cup\varkappa_G(a)=\inf(\beta\cup\varkappa_{G/\Gamma}a)$

ב2. $\varkappa_G(a)\cup(\inf\beta)=\inf(\varkappa_{G/\Gamma}a\cup\beta)$.

<u>בדיקה</u> פשוט לפתוח נוסחאות ולבדוק.

<u>השלמת הבנייה</u> $\varphi_{p,q}$ <u>לכל p,q</u> (Iyanaga – theory of nums.)

<u>תזכורת</u> ① לכל $\mathbb{Z}$-הומ' f, $\sigma(f)=\sigma\circ f\circ\sigma^{-1}$ ואז
N_Gf הוא G-הומ'.
אם h,k G-הומ', $N_G(h\circ f\circ k)=h\circ N_Gf\circ k$.

② לכל G-מודול חופשי X (או משרה) קיים $\mathbb{Z}$-הומ'
$\pi:X\to X$ כך ש- $N_G\pi=id_X$.

<u>ההשלמה</u> נניח שבנינו $\varphi_{p,q}:X_{p+q}\to X_p\otimes X_q$ ל- $p\geq t$ ו- $q\geq 0$ כך ש-
$\varphi_{p,q}\circ\partial=\partial'\circ\varphi_{p+1,q}+(-1)^p\partial''\varphi_{p,q+1}$ (*).

נסמן $\varphi_{t-1,q}=N_G((\pi_{t-1}\partial\otimes 1)\circ\varphi_{t,q}\circ D_{t+q-1})$ $(q\geq 0)$ כאשר D ההומוטופיה המכווצת
$\partial_{n+1}D_n+D_{n-1}\partial_n=id_{X_n}$. נבדוק:

$$\varphi_{t-1,q}\partial=N_G((\pi\partial\otimes 1)\circ\varphi_{t,q}\circ D\circ\partial)=N_G((\pi\partial\otimes 1)\varphi_{t,q})-N_G((\pi\partial\otimes 1)\circ\varphi_{t,q}\circ\partial\circ D)=$$

$$=\underbrace{N_G((\pi\otimes 1)\circ(\partial\otimes 1)}_{1}\circ\varphi_{t,q})-N_G((\pi\otimes 1)\underbrace{\partial'\circ[\partial'}_{0}\varphi_{t+1,q}+(-1)^t\partial''\varphi_{t,q+1}]D)=$$

$$= \partial' \circ \varphi_{t,q} + (-1)^{t-1} N_G\left((\pi\partial \otimes 1) \circ (1 \otimes \partial)\, \varphi_{t,q+1} D\right] =$$

$$= \partial' \circ \varphi_{t,q} + (-1)^{t-1} \partial'' \underbrace{N_G\left((\pi\partial \otimes 1)\, \varphi_{t,q+1} D\right)}_{\varphi_{t,q+1}} = \varphi_{t,q+1}$$

נניח שבנינו לכל $p \in \mathbb{Z}$, $q \geq s$, מגדירים:

$$\varphi_{p,s-1} = (-1)^{p} N_G\left((1 \otimes \pi\partial)\, \varphi_{p,s} D\right)$$

והבדיקה באותו אופן.

בשבוע הבא נשתמש בהצגות מ'מ כדי להראות יחידות של ההגדרה.