W7D3

9/12/14

קוהומ'

פרק 11 - משפט טייט ומודול מחלקה

1 משפט טייט על טריוויאליות קוהומולוגית:

(*) יהי A G-mod ונניח $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\forall \Gamma < G$, מתקיים $H^{n_0}(\Gamma, A) = H^{n_0+1}(\Gamma, A) = 0$ אז A טריוויאלי קוהומ'.

הוכחה: נסמן תנאי $P_A(n)$ - $H^n(\Gamma,A)=0$ לכל $\Gamma < G$.

צ"ל: לכל $n,j\in\mathbb{Z}$ $P(n),P(n+1) \Rightarrow P(j)$. (לכל A מודול-G)

ראשית נבחין שאפשר להנ"ח עם הזזת מימד $n,j\geq 1$.

אם הוכחנו לכל A $P_A(n+1),P_A(n+2) \Rightarrow P_A(j+1)$. אז

תהי ס"ד $0\to \tilde{A}\to M \to A\to 0$ סדרה מדויקת ו-A טריוויאלי קוהומ'. אז לכל $\Gamma<G$ $\delta: H^k(\Gamma,A)\xrightarrow{\cong} H^{k+1}(\Gamma,\tilde A)$.

לכן $P_{\tilde A}(j+1)\Leftrightarrow P_A(j)$, $P_{\tilde A}(n+1)\Leftrightarrow P_A(n)$, $P_{\tilde A}(n+2)\Leftrightarrow P_A(n+1)$.

מכאן שניתן להנ"ח $n_0\geq 1$ ולהוכיח ל- $j\geq 1$ את (*).

אם G ציקלית Γ ציקלית ויש מחזוריות 2 של הקוהומ' ולכן (*) תקף.

נוכיח באינדוקציה על $|G|$ - ו- $|G|=1$ טריוויאלי, כי $\hat{H}(1,A)=0$.

יהי A G-מודול שמקיים את התנאי עבור $n_0\geq 1$ כלשהו.

המשפט תקף לכל תת חבורה שונה מ G, מהנחת האינדוקציה.

די להראות $H^j(G,A)=0$ לכל $j\geq 1$.

אם G אינה חבורת p, אז מאינדוקציה לכל ~~חבורת~~

p ראשוני $H^j(G_p,A)=0$ $(\forall j\geq 1)$ כי $G_p \subsetneq G$.

מהסדרה המדויקת $0\to H^j(G,A)_p \to H^j(G_p,A)$ נובע

$H^j(G,A)_p=0$ לכל p ראשוני. אבל $H^j(G,A)$ סכום ישר שלהם ולכן גם היא אפס.

אם G חבורת p לא ציקלית ידוע שיש לה $\Gamma \triangleleft G$ כך ש-

המנה ציקלית (בפרט $\Gamma\neq\{1\}$ ולכן $|G|>|\Gamma|, |G/\Gamma|$).

נשתמש בסדרת inflation-restriction. אינדוקטיבית $H^j(\Gamma,A)=0$

ולכן ~~הסדרה~~ היא מדויקת לכל $j\geq 1$ -

$$0 \to H^n(G/\Gamma, A^\Gamma) \underset{\cong (**)}{\xrightarrow{inf}} H^n(G,A) \xrightarrow[(n_0-1,\ n_0 \geq \dots)]{res} H^n(\Gamma,A)=0$$

לכל $1 \le n$. מכאן ש- $H^n(G/\Gamma, A^\Gamma)=0$ אבל G/Γ ציקלית ולכן $H^n(G/\Gamma, A^\Gamma)$
מתאפס לכל $1\le n$ והטענה נובעת מ- (**).

② **מודול מחלקה** (Lang p.71)

הגדרה G-מודול A נקרא מודול מחלקה (קלאסי) אם לכל $\Gamma < G$
מתקיים $H^1(\Gamma,A)=0$, $|H^2(\Gamma,A)|=|\Gamma|$ ו- $H^2(G,A)$
ציקלית. יוצר α שלה נקרא איבר יסודי (fundemental).

הערה אם A מודול מחלקה ו- α יסודי, $\forall \Gamma<G$, $H^2(\Gamma,A)$
גם ציקלית עם יוצר $res_{G\to\Gamma}\alpha$.

הוכחה נסמן ב-d את הסדר של $res_{G\to\Gamma}\alpha$ ב- $H^2(\Gamma,A)$. אז
$H^2(G,A)\ni 0 = cor_{\Gamma\to G}(0) = cor_{\Gamma\to G}(d\, res_{G\to\Gamma}\alpha) = d(G:\Gamma)\alpha$ אבל α יוצר של
$H^2(G,A)$ מסדר |G| ולכן $|G| \mid d(G:\Gamma)$ ולכן $|\Gamma| \mid d$. אבל d סדר
של איבר בחבורה מגודל |Γ| ולכן נסיק $d=|\Gamma|$ ו- $res_{G\to\Gamma}\alpha$ יוצר של Γ ציקלית.

משפט יהי A G-מודול ו- $\alpha\in H^2(G,A)$ אז A מודול מחלקה
עם איבר יסודי α אם"ם המודול המצב $A'(\alpha)$ טריוויאלי קוהומולוגית.

הוכחה ראשית הכיוון (שלא תלוי באף הנחה) - נשתמש בסדרות מדויקות
$0\to I_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ (I), $0\to A \to A' \to I_G \to 0$ (II).
מתקיים $\alpha = \delta_{II}\delta_I \bar{1}$ (כאשר $\bar 1 = 1 \in \hat H^0(G,\mathbb Z)$) $\mathbb{Z}[G]$ טריוויאלי
קוהומולוגית ולכן לכל $\Gamma<G$, $H^0(\Gamma, I_G) \overset{\delta}{\cong} H^{-1}(\Gamma,\mathbb Z) = \frac{{}_N\mathbb Z}{I_\Gamma \mathbb Z}=0$
$H^2(\Gamma,I_G)\overset{\delta}{\cong} H^1(\Gamma,\mathbb Z)=Hom_{group}(\Gamma,\mathbb Z^+)=0$. כמו כן $H^1(\Gamma,I_G)\overset{\delta}{\cong} H^0(\Gamma,\mathbb Z)=\frac{\mathbb Z}{|\Gamma|\mathbb Z}$. לכן
אם נסמן ב- $\bar 1_\Gamma$ את $1_{\mathbb Z}+|\Gamma|\mathbb Z$ ב- $H^0(\Gamma,\mathbb Z)$ יוצר של $H^0(\Gamma,\mathbb Z)$
ציקלית מסדר |Γ| ולכן $u=\delta_I^\Gamma(\bar 1_\Gamma)$ יוצר של $H^1(\Gamma,I_G)$
ציקלית מסדר |Γ|. אבל $res_{G\to\Gamma}\bar 1 = \bar 1_\Gamma$ ו- res מתחלף עם
δ ולכן $\delta_{II}^\Gamma u = \delta_{II}^\Gamma\delta_I^\Gamma \bar 1_\Gamma$ הוא $res_{G\to\Gamma}(\delta_{II}^G\delta_I^G\bar 1)=res_{G\to\Gamma}\alpha$. לכן מהסדרה הארוכה
של II נקבל
$$0=H^0(\Gamma,I_G)\xrightarrow{\delta_{II}^\Gamma} H^1(\Gamma,A)\to H^1(\Gamma,A')\to H^1(\Gamma,I_G) \xrightarrow{\delta_{II}^\Gamma}$$
(לכל Γ)
$$\xrightarrow{\delta_{II}^\Gamma} H^2(\Gamma,A)\to H^2(\Gamma,A')\to H^2(\Gamma,I_G)=0$$
$$(u \longmapsto res_{G\to\Gamma}\alpha)$$

כעת נוכל להוכיח שקילות של 2 התנאים -
אם A מודול מחלקה עם איבר יסודי α, $res_{G\to\Gamma}\alpha$ יוצר את $H^2(\Gamma,A)$

ציקלית מסדר $|\Gamma|$. אבל u יוצר של $H^1(\Gamma, I_G)$ ציקלית

מאותו סדר ולכן δ_{II}^{Γ} איזו' (מעביר יוצר ליוצר). לכן נקבל

$\underbrace{0=H^1(\Gamma,A)}_{A \text{ מודול מחלקה}} \cong H^1(\Gamma,A')$ ו- ~~מכפלות מודול מחלקה~~ . $H^2(\Gamma,A')=0$

ממשפט ט"י נקבל A' טריוויאלי קוהומולוגית.

בכיוון ההפוך, נניח A' טריוויאלי קוהומולוגית. אז מהסדרה

נקבל $H^1(\Gamma,A)=0$ ו- δ_{II}^{Γ} איזו' - $H^2(\Gamma,A)\cong H^1(\Gamma,I_G)$

ציקלית מסדר $|\Gamma|$. כמו כן נקבל ש- $res_{G\to\Gamma}\varphi$ יוצר של $H^2(\Gamma,A)$.

בפרט $\varphi=res_{G\to G}\varphi$ יוצר את $H^2(G,A)$ ולכן φ יסודי.

<u>מסקנה</u> יהי A G-מודול מחלקה עם איבר יסודי φ. אז העתקת

נקיימה $\psi_\varphi: G/G' \to H^0(G,A)=\frac{A^G}{N_GA}$ שמתאימה ע"י $\sigma G' \mapsto \underbrace{\xi_\sigma}_{\hat H^2(G,\mathbb{Z})} \to \delta_{II}\delta_I\delta_\sigma$

היא איזומורפיזם.

<u>הוכחה</u> δ_I איזו' כי $\mathbb{Z}[G]$ מושרה.

δ_{II} איזו' כי A' טריוויאלי קוהומולוגית.

פרק 12 - מכפלות $\cup$ (cup) - בנייה (בלי יחידות)

(1) <u>תזכורת/סימונים</u>: פתרון מלא של $\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_3"] & X_2 \arrow[r, "\partial_2"] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] & X_0 \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & X_{-1} \arrow[r, "\partial_{-1}"] & X_{-2} \cdots \\
& & 0 \arrow[rr] & & \mathbb{Z} \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

$X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1}$ - G-הומ'.

$Hom(X_n,A) \xleftarrow{\partial_n^*} Hom(X_{n-1},A)$ ע"י הרכבה עם ∂_n.

נסמן ל- $p,q\in\mathbb{Z}$ $\partial'=\partial'_{p,q}=\partial_p\otimes id_{X_q}: X_p\otimes X_q \to X_{p-1}\otimes X_q$

$\partial''=\partial''_{p,q}=id_{X_p}\otimes\partial_q: X_p\otimes X_q \to X_p\otimes X_{q-1}$,

<u>למה</u> (נוכיח בסוף הפרק לפתרון הסטנדרטי): קיימים G-מורפיזמים

$\varphi_{p,q}: X_{p+q} \to X_p\otimes X_q$.

(I)

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "\varphi_{0,0}"] \arrow[d, "\varepsilon"] & X_0\otimes X_0 \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

חילופי (אחרי זיהוי $\mathbb{Z},\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}$) $\varepsilon=(\varepsilon\otimes\varepsilon)\varphi_{0,0}$,

(II) $\varphi_{p,q}\partial_{p+q+1}=\partial'_{p+1,q}\varphi_{p+1,q}+(-1)^p\partial''_{p,q+1}\varphi_{p,q+1}$ (שלושתם $X_{p+q+1}\to X_p\otimes X_q$)

<u>הגדרת מכפלות $\cup$</u> יהיו A,B G-מודולים, $\alpha\in H^p(G,A)$, $\beta\in H^q(G,B)$

יהיו $f\in Hom_G(X_p,A)$ ו- $g\in Hom_G(X_q,B)$ קוציקלים המייצגים את α,β

$(f\otimes g)\circ\varphi_{p,q}\in Hom(X_p\otimes X_q, A\otimes B)$ 5/6

הוא קוציקלוס המייצג איבר (מוגדר היטב - לא תלוי בבחירת f,g)
$\alpha\cup\beta\in H^{p+q}(G,A\otimes B)$.

<u>סימון</u> אם $\eta: A\otimes B\to C$ הומ' G-מודולים, מסמנים $\alpha\cup_\eta\beta\in H^{p+q}(G,C)$
הרכבה $H^{p+q}(G,\eta)\circ(\alpha\cup\beta)$.

<u>בדיקה</u> (א) $(f\otimes g)\circ\varphi$ קוציקלוס - $\partial^*((f\otimes g)\circ\varphi)=(f\otimes g)\circ\varphi\circ\partial=(f\otimes g)(\partial\otimes 1)\varphi\pm$
$\pm(f\otimes g)(1\otimes\partial)\varphi=(\underbrace{(\partial^* f)}_{0}\otimes g)\varphi\pm(f\otimes\underbrace{(\partial^* g)}_{0})\varphi=0$

(ב) אי תלות ב-f - בהחלפת f ב- $f+h\partial=f+\partial^* h$ נקבל
הפרש $((f+h\partial)\otimes g)\circ\varphi-(f\otimes g)\circ\varphi=((h\partial)\otimes g)\circ\varphi=(h\otimes g)\circ\partial\circ\varphi$, וכו'
$=(h\otimes g)\circ\varphi\circ\partial\pm(h\otimes g)\circ\partial''\circ\varphi=$
(ג) אי תלות ב-g דומה.
$\underbrace{\partial^*((h\otimes g)\circ\varphi)}_{\text{שפה}}\pm((\partial^* h)\otimes g)\circ\varphi=$ שפה

(2) <u>תכונות</u>: 1) <u>פונקטוריאליות</u> - $t:A\to\hat{A}$, $s:B\to\hat{B}$ הומ' G
של G-מודולים, $t\otimes s:A\otimes B\to\hat{A}\otimes\hat{B}$ הומ' G, ו-
$H^{p+q}(G,t\otimes s)(\alpha\cup\beta)=(H^p(G,t)\alpha)\cup(H^q(G,s)\beta)$

<u>בדיקה</u> - נובעת הנוסחה $(t\otimes s)\overbrace{((f\otimes g)\circ\varphi)}^{\text{מייצג שמאל}}=[(t\otimes s)(f\otimes g)]\varphi=\overbrace{((t\circ f)\otimes(s\circ g))\varphi}^{\text{מייצג ימין}}$

תזכורת: $\mathcal{N}$ נתונה ע"י
$\mathcal{N}: A^G\cong Hom_G(\mathbb{Z},A)\xrightarrow{\varepsilon_0^*}Hom_G(X_0,A)$
$a\longrightarrow f_a\longrightarrow f_a\circ\varepsilon$
$f_a(1)=a$
ובדומה / נסמן B $g_b(1)=b$
" $A\otimes B$ $h_{a\otimes b}(1)=a\otimes b$

2) <u>נרמול</u>: $\mathcal{N}(a)\cup\mathcal{N}(b)=\mathcal{N}(a\otimes b)$
$H^0(A)$ $H^0(B)$ $H^0(A\otimes B)$

אז ה-cup נתונה ע"י
$((f_a\circ\varepsilon)\otimes(g_b\circ\varepsilon))\circ\varphi_{0,0}=$

$=(f_a\otimes g_b)\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)\circ\varphi_{0,0}=\{\underbrace{X_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\xrightarrow{f_a\otimes g_b}A\otimes B}_{h_{a\otimes b}}\}=$

$h_{a\otimes b}\circ\varepsilon=\mathcal{N}(a\otimes b)$.

3) <u>סדרות מדויקות</u>: תהי $0\to A\xrightarrow{h}B\xrightarrow{k}C\to 0$ (I) מדויקת
ב- G-mod. יהי M G-מודול ו- μ ב- $H^p(M)$, $\gamma\in H^q(C)$.
א. אם (II) $0\to A\otimes M\xrightarrow{h\otimes 1}B\otimes M\xrightarrow{k\otimes 1}C\otimes M\to 0$ מדויקת אז $\delta(\gamma\cup\mu)=\delta(\gamma)\cup\mu$.
ב. אם $0\to M\otimes A\xrightarrow{1\otimes h}M\otimes B\xrightarrow{1\otimes k}M\otimes C\to 0$ מדויקת אז $\delta(\gamma\cup\mu)=(-1)^{\deg\mu=p}(\mu\cup(\delta\gamma))$.

<u>הוכחה</u> לפי (א), (ב) דומה. γ מיוצג ע"י קוציקלוס מהצורה $k\circ f$ כאשר

$f\in Hom_{\mathbb{G}}(X_q,B)$. אז $\delta\gamma$ מיוצג ע"י קוציקל $g\in Hom_{\mathbb{G}}(X^{q+1},A)$

הנדרש לקיים $f\circ\partial=\partial^*(f)=h\circ g$. יה' $m\in Hom_{\mathbb{G}}(X_p,M)$ קוציקל המייצג

את μ. אז $\mu\cup(\delta\gamma)$ מיוצג ע"י $(m\otimes g)\circ\varphi_{p,q+1}\in Hom_{\mathbb{G}}(X_{p+q+1},M\otimes A)$. מצד שני

$\mu\cup\gamma$ מיוצג ע"י $(m\otimes(k\circ f))\varphi_{p,q}=(1\otimes k)(m\otimes f)\varphi_{p,q}$ ולכן δ שלו מיוצג ע"י

קוציקל $\xi\in Hom_{\mathbb{G}}(X_{p+q+1},A\otimes B)$ הנדרש לקיים $(id\otimes h)\circ\xi=\partial^*((m\otimes f)\circ\varphi_{p,q})=(m\otimes f)\circ\varphi_{p,q}\circ\partial$.

די להוכיח ש- $(-1)^p\xi=(m\otimes g)\circ\varphi_{p,q+1}$. $1\otimes h$ חח"ע ולכן

די להוכיח ש- $(-1)^p(id\otimes h)\circ\xi=(id\otimes h)\circ(m\otimes g)\circ\varphi_{p,q+1}$. אכן

צד ימין $=(m\otimes hg)\circ\varphi_{p,q+1}=(m\otimes f\partial)\circ\varphi_{p,q+1}=(m\otimes f)\circ\partial''\circ\varphi_{p,q+1}=$

$(-1)^p(id\otimes h)\circ\xi+(-1)^{p+1}\underbrace{((m\partial)\otimes f)}_{\partial^* m=0}\varphi_{p+1,q}=(-1)^p(id\otimes h)\circ\xi=$ צד שמאל.