W6D5

4/12/14

קוהומ'

נתאר את האיזו' $H^q(G,A) \cong \frac{A^G}{N_G A}$ ל-G $\underbrace{\text{ציקלית}}_{\sigma \text{ יוצר}}$
במספר של שרשראות.

יהי X_n הפתרון הסטנדרטי המלא של $\mathbb{Z}$ וניקח $n \geq -1$.
נמצא G-הומ' $\varphi_{-1},\varphi_0,\dots$ כך שהתרשים חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_0 \arrow[r, "{\partial_0 = [\cdot] \to N_G\langle\cdot\rangle}"] \arrow[d, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & X_{-1} \arrow[d, "\varphi_{-1}"] & \\
 & & & & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r, "\sigma-1"] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r, "N_G"] \arrow[ur, "\varepsilon"] & \mathbb{Z}[G] &
\end{tikzcd}$$

ל- φ_1,φ_0 אפשר לקחת $\varphi_0([\cdot])=1_G,\ \varphi_{-1}(\langle\cdot\rangle)=1_G$ ולבנות
משם φ_1, φ_2 וכו' כי X_φ $\mathbb{Z}$-חופשי:

נפעיל $Hom_G(\ ,A)$ נקבל

$$\begin{tikzcd}
\cdots & Hom_G(X_2,A) \arrow[l] & Hom_G(X_1,A) \arrow[l, "\partial_2^*"'] & Hom_G(X_0,A) \arrow[l, "\partial_1^*"'] & Hom_G(X_{-1},A) \arrow[l, "\partial_0^*"'] \\
 & & & A^G \arrow[u, "\varepsilon^*"] & 0 \arrow[l] \\
\cdots & Hom_G(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[l] \arrow[uu, "\varphi_2^*"] & Hom(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[l, "N_G^*"'] \arrow[uu, "\varphi_1^*"] & Hom(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[l, "(\sigma-1)^*"'] \arrow[uu, "\varphi_0^*"] \arrow[ur, "\varepsilon^*"] & Hom_G(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[l, "N_G^*"'] \arrow[uu, "\varphi_{-1}^*"]
\end{tikzcd}$$

נקבל מכך הומ' $H^n(\varphi^*): {}_N H^n(G,A) \to H^n(G,A)$ ל- $n \geq 0$.
מחזורי

כמו כן יש תרשים חילופי

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(G,A) \\
A_G \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "{}_N\lambda"'] & \\
 & {}_N H^0(G,A) \arrow[uu, "H^0(\varphi^*)"']
\end{tikzcd}$$

וידוע

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(G,A) \\
\frac{A^G}{N_G A} \arrow[ur, "\cong \text{ קנוני}"] \arrow[dr, "\cong \text{ קנוני}"'] & \\
 & {}_N H^0(G,A) \arrow[uu, "H^0(\varphi^*)"']
\end{tikzcd}$$

שבשני המקרים $\ker\lambda = \ker {}_N\lambda = N_G A$, ולכן
מחזורי. לכן $H^0(\varphi^*)$ שקילות טבעית
של משפט היחידות מפרק 4, ולכן גם $H^n(\varphi^*)$ לכל $0 \leq n$.
נרצה לבנות φ_2. קודם כל φ_1 צריך לקיים (ל- X_1 בסיס $[\sigma^i]$ $i=0,\dots,n-1$)
$(\sigma-1)\varphi_1([\sigma^i]) = \varphi_0(\partial([\sigma^i])) = \varphi_0(\sigma^i[\cdot]-[\cdot]) =$
$\sigma^i\varphi([\cdot]) - \varphi([\cdot]) = \sigma^i - 1_G$
ולכן נוכל לקחת $\varphi_1([1_G])=0$, $\varphi_1([\sigma^i]) = 1 + \dots + \sigma^{i-1}$.
$(n > i > 0)$

כעת φ_2 – ו־ φ_1 – $0\le i,j<n$ נסמן $\overline{i+j}$ חיבור מוד n.

$N_G(\varphi_2([\sigma^i,\sigma^j]))=\varphi_1(\partial([\sigma^i,\sigma^j]))=\varphi_1(\sigma^i[\sigma^j]-[\sigma^{\overline{i+j}}]+[\sigma^i])=$ אז

$=\sigma^i(\sigma^{j-1}+\dots+1)-(\sigma^{\overline{i+j}-1}+\dots+1)+(\sigma^{i-1}+\dots+1)=$

$(\sigma^{i+j-1}+\dots+1)-(\sigma^{\overline{i+j}-1}+\dots+1)=\begin{cases}0 & i+j\le n-1\\ N_G & n\le i+j\end{cases}$

לכן $H^2(\varphi_2^*):H^2(G,A)\to H^2(G,A)$ מקיים, לכל $a\in A^G$,

$\frac{A^G}{N_G A}\xrightarrow{\Phi}$

f_a מוגדר ע"י $f_a(1_G)=a$

$\Phi(a+N_G A)$ נתון ע"י קוציקלוס $f_a(\varphi_2[\sigma^i,\sigma^j])=\eta_a(\sigma^i,\sigma^j)$

לכן $\eta_a(\sigma^i,\sigma^j)=\begin{cases}0 & (i+j\le n-1)\\ a & (n\le i+j)\end{cases}$.

לסיכום ל־ G ציקלית עם יוצר σ, A G-מודול

לכל $a\in A^G$ נגדיר $\eta_a:G^2\to A$ קוציקלוס,

שמייצג את 0 ב־ $H^2(G,A)$ אמ"מ $a\in N_G A$

ולכן נקבל ביחידות מודולו $N_G A$, ולכן האיזו׳

$\Phi:\frac{A^G}{N_G A}\to H^2(G,A): a+N_G A\longmapsto \eta_a$ נתון ע"י a שמייצג $\varphi\in H^2(G,A)$

<u>תיאור איזו׳ ההפוך בעזרת העתקת נקימה</u>

ראינו: שלכל $\varphi\in H^2(G,A)$ יש הומ׳ $V_\varphi:\frac{G}{G'}\to\frac{A^G}{N_G A}:\sigma G'\mapsto\sum f(\tau,\sigma)$

כאשר φ מיוצג ע"י f (כאן $\frac{G}{G'}=G$ כי G אבלית).

אז ל־ η_a נציג של φ, $V_\varphi(\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1}\eta_a(\sigma^i,\sigma)=a=a+N_G A$

ובפרט ליוצר אחר σ^k נקבל העתקה $\varphi\to V_\varphi(\sigma^k)=kV_\varphi(\sigma)$.

נוסחת Tate

<u>מודול טריוויאלי</u>

ל־ A G-מודול טריוויאלי הפעולה של $(\sigma-1)$ כפל ב־0 על

N_G כפל ב־ $|G|=m$. במקרה זה מנת הרברנד

$\frac{|H^{\text{זוגי}}(G,A)|}{|H^{\text{אי זוגי}}(G,A)|}=h_{2/1}(A)=q_{0,m}(A)$ וזה $=\frac{(A:mA)}{({}_mA:0)}$ $\frac{\ker 0:\operatorname{Im} m}{\ker m:\operatorname{Im} 0}$

כעת ל־ A G-מודול נסמן $h^0(A)=h_{2/1}(A)$ אם

כן, A^G G-מודול טריוויאלי מוגדר $h^0(A^G)=h_{2/1}(A^G)$,

<u>נוסחת Tate</u> אם G ציקלית מסדר ראשוני p ו־ σ יוצר

אם $h^0(A)$ מוגדר אז גם $h^0(A^G)$ ו־ $h(A)=h^0(\dots)$

$$\cdot\ h_{2/1}(A)^{p-1} = \frac{h^{0}(A^{G})^{p}}{h^{0}(A)} \to \text{[illegible]}$$