28/10/14
W1D3

# קוהומולוגיה של חבורות ושדות מחלקה מקומיים

דוגמה (טריוויאלית) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}$ - חבורת גלואה איזו' ל-$\mathbb{Z}_2$ וכך גם

$$\frac{\mathbb{R}^\times}{N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{C}^\times} = \frac{\mathbb{R}^\times}{\mathbb{R}_+^\times} = \mathbb{Z}_2 .$$

Serre - Local Fields

Weiss - Cohomology of Groups

Lang - Topics in Cohomology of Groups

Cassels & Fröhlih - Algebraic N.T. (Attyah & Walls - Coh. Serre - Local fields)

Artin - Tate - class fields theory.

## פרק I - הכנה על מודולים, פונקטורים, סדרות מדויקות

1. חוג $R$ - עם יחידה.

$R$ מודול - אוניטרי $1_R m = m$ ($R$- מודול משמאל).

$\mathbb{Z}$ מודולים - חב' חילופיות.

$G$ מודולים - מודול חבורה.

מוגדר חוג $\mathbb{Z}[G]$ חוג החבורה.

$G$ מודול הוא $\mathbb{Z}[G]$ מודול (משמאל).

$1_G a = a$

$(\tau\sigma)a = \tau(\sigma a)$

$\left(\sum_{\sigma\in G} m_\sigma \sigma\right)(a) = \sum_{\sigma\in G} m_\sigma\cdot\sigma(a)$

יהי $A$ $G$-מודול.

$$A^G = \{a\in A \mid Ga = \{a\}\}$$

ח' חילופית (מאפשר מבנה $G$ - מודול טריוויאלי). $N_G = \sum_{\sigma\in G}\sigma \in \mathbb{Z}[G]$

$$N_G\cdot A \subseteq A^G$$

נתעניין במנה $\frac{A^G}{N_G A}$. לדוג' - $G = G(L/k)$. $(L^\times)^G = K^\times$

$$\frac{(L^\times)^G}{N_G\cdot L^\times} = \frac{K^\times}{N_{L/K}L^\times}$$ (בכתיב כפלי).

$A$ - מודול טריוויאלי (של $G$) $A$ חילופית אם $Ga = \{a\}$ $\iff$ $A^G = A$

נתעניין ב-$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ בתור $G$-מודולים טריוויאליים

הומ' אם $R$ חוג ו- $M,N$ $R$-מודולים ו-$f$ הומ' $M\to N$ של חבורות חילופיות הוא $R$-הומ' אם $f(rm) = r\cdot f(m)$. סימון

$Hom_R(M,N)$ חבורה חילופית, מודול מעל מרכז R..

דוגמה - אם A,B G-מודולים נסמן ב- $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(A,B)$.

דוגמה - אם A,B $\mathbb{Z}$ מודולים $Hom(A,B)$ יסמן $Hom_{\mathbb{Z}}$.

יש מבנה של G-מודול על $Hom(A,B)$ ע"י $(\sigma f)(a)=\sigma(f(\sigma^{-1}a))$

דוגמה - $Hom(A,B)^G = Hom_G(A,B)$.

דוגמה - אם M G-מודול אז $Hom_G(\mathbb{Z},M)$? $Hom(\mathbb{Z},M)$?

$Hom_G(\mathbb{Z},M) = M^G$ כי G פועל טריוויאלית על $\mathbb{Z}$, $f \to f(1)$ שחייב להישאר תחת G

$Hom(\mathbb{Z},M) = M$, $f\to f(1)$ איזו' של G-מודולים $(\sigma f)(1_{\mathbb{Z}})=\sigma(f(1_{\mathbb{Z}}))$

$N_G : Hom(A,B) \to Hom_G(A,B)$

$(N_G f)(a)=\sum \sigma(f(\sigma^{-1}a))$

---

אם A,B G מודולים ואם $h: A'\to A,\ k: B\to B'$ ($A'$, $B'$ גם) הומ' של G-מודולים, אז $N_G(k\circ f\circ h)=k\circ N_G(f)\circ h$

בספרות מסומן לעתים $N_G = S$

<u>מכפ' טנזוריות</u>

אם A,B $\mathbb{Z}$ מודולים $A\otimes B = A\otimes_{\mathbb{Z}} B$

- ח' חילופית חופשית מעל $(a,b)$ מודולו $(a+b,c)-(a,c)-(b,c)$, $n(a,b)-(na,b)$ וכדומה.

- תיאור שני - תכונת בילינאריות אוניברסלית $A\times B \to A\otimes B$ לפיה יש אוסף מכפלות ~~סקלריות~~ טנזוריות שקולות. יותר נוח לנו.

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes B \arrow[dl, dashed] \\ Z & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}\otimes A = A = A\otimes\mathbb{Z}$ למשל.

$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. אפשר לחשוב כעל מכפלה אך איזו' קנוני.

- אם A,B G-מודולים אז $A\otimes B$ G-מודול ע"י $\sigma(a\otimes b)=(\sigma a)\otimes(\sigma b)$

<u>פונקטורים</u>

אם R ו-$R'$ חוגים עם יחידה פונקטור $T: R\text{-mod}\to R'\text{-mod}$ הוא התאמה $M\to TM$ בתוספת התאמה $f\in Hom(M,N)$ ל- $Tf\in Hom(TM,TN)$ כך ש -

א) $f \to Tf$ הומ' של חב' חילופיות.

ב) $T(f\circ g) = Tf\circ Tg$

ג) $T\,id_M = id_{TM}$.

נובע $T(n\, id_M) = n\, id_{TM}$

הערה: T זה פונקטור

קו-וריאנטי: $M \xrightarrow{f} N$, $TM \xrightarrow{Tf} TN$

קונטרה וריאנטי: $TN \xrightarrow{Tf} TM$ $(T(f\circ g) = Tg\circ Tf)$

$T(R\text{-}\underset{0}{\text{mod}}) = (R'\text{-}\underset{0}{\text{mod}})$ (מודול 0 - לא יחיד - העתקת 0 זהות שוות).

<u>דוגמה</u> (לפונקטור) יהי M G-מודול.

$Hom(\_, M): G\text{-mod} \to G\text{-mod}$

$[Hom_G(\_, M): G\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}]$

פונקטורים קונטרה וריאנטיים.

נבדוק - $\varphi: A\to B$ אם G-מורפיזם.

$\varphi^*: Hom(B,M) \to Hom(A,M)$

מוגדר ע"י $\varphi^*(h) = h\circ\varphi$

$TA = Hom(A,M)$

$T\varphi = \underset{\text{סימון}}{Hom}(\varphi, M) = Hom_G(Hom(A,M), Hom(A,B))$

נבדוק שזה G-מורפיזם -

$\varphi^*(\sigma h) = \sigma(h)\circ\varphi = (\sigma\circ h\circ\sigma^{-1})\circ\varphi = \sigma(h\circ\varphi) = \sigma(\varphi(h))$

כי $\varphi$ G-מורפיזם.

זהו פונקטור קונטרה-וריאנטי מ-G מודולים ל-G מודולים.

<u>עוד דוג' לפנקטורים</u>

1) $TA = A$ זהות.

2) פנקטור שוכח $G\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}$.

3) פנקטור T ההופך חבורה חילופית ל-G מודול טריוויאלי.

4) $T: A \to A^G$ מ-G מודולים ל-$\mathbb{Z}$-מודולים.

$A \to \frac{A^G}{N_G A}$

5) $M\otimes\_ : G\text{-mod} \to G\text{-mod}$

$\_\otimes M$: " $\to$ "

כנ"ל לגבי $Hom(\_,M)$ וכבר ראינו ו-$Hom(M,\_)$ מ-G-מודול ל-G-מודול (זה מן הסתם קו-וריאנטי).

ההתאמה $Hom_G(\mathbb{Z}, A) \cong A^G$ שקילות טבעית של פנקטורים.

טבעית במובן הבא:

יהיו $T,S: R\text{-mod} \to R'\text{-mod}$. התאמה טבעית $\theta: T \to S$ היא העתקה

המתאימה לכל R-mod A $\theta_A \in Hom_{R'}(TA, SA)$ כך שלכל $f\in Hom_R(A,B)$

שקילות טבעית זו א"ג ד אם חילופי. (ולכן גם $\theta^{-1}$).

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "\theta(A)"] \arrow[d, "Tf"'] & SA \arrow[d, "Sf"] \\ TB \arrow[r, "\theta(B)"'] & SB \end{tikzcd}$$

דוגמאות נוספות לשקילויות טבעיות — $A$ $\mathbb{Z}$-מודול חופשי נוצר סופית ($A \simeq \mathbb{Z}^k$) אז $Hom(A,B) = Hom(\mathbb{Z}^k, B) \simeq B^k$. $A \otimes B \simeq \mathbb{Z}^k \otimes_{\mathbb{Z}} B \simeq B^k$

## קומפלקסים, הומולוגיה וסדרות מדויקות

יהי $R$ חוג ($R=\mathbb{Z}$ או $\mathbb{Z}[G]$). נרצה לדבר על סדרות של הומ' של $R$-מודולים

$$\begin{tikzcd} (A) & \cdots A_{m-1} \arrow[r, "\partial_{m-1}"] \arrow[d, "f_{m-1}"] & A_m \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, "f_m"] & A_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{m+1}"] & \cdots \\ (B) & B_{m-1} \arrow[r, "\partial'_{m-1}"] & B_m \arrow[r, "\partial'_m"] & B_{m+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

נדרוש ש- $\partial, \partial', f$ הומ' של $R$-מודולים.

אם התרשים חילופי נאמר ש-$f$ מורפיזם של סדרות, $f: A \to B$

$A$ קומפלקס אם $\partial_m \circ \partial_{m-1} = 0$, כלומר $Im\,\partial_{m-1} \subseteq Ker\,\partial_m$

במקרה זה ההומולוגיה היא סדרה של $R$-מודולים $H^m(A) = \frac{Ker\,\partial_m}{Im\,\partial_{m-1}}$

(אם אין 2 צדדים נהוג להוסיף 0).

אם $f: A \to B$ קומפלקסים נקבל $H^m(f): H^m(A) \to H^m(B)$

כלומר $H^m$ פונקטור מסדרות מדויקות לחבורות חילופיות.

הסדרה מדויקת אם $H^m = 0$ לכל $m$, או $Ker\,\partial_m = Im\,\partial_{m-1}$.

הדיוק לא תלוי במבנה כ-$G$ מודולים אלא רק כ-$\mathbb{Z}$-מודולים -

אפשר לשכוח מהמבנה הנוסף.

סדרה מדויקת חשובה - סדרה קצרה מדויקת

$$0 \to A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{k} C \to 0$$

קומפלקס אם $k \circ h = 0$, מדויקת אם $Im\,h = Ker\,k$, $h$ חח"ע ו-$k$ על.

**דוגמה** — $R$-מודול $B$ ותת-מודול $A$, $0 \hookrightarrow A \xrightarrow{Inc.} B \xrightarrow{\text{מנה}} \frac{B}{A} \to 0$

(למעשה יחידה) של סדרה קצרה מדויקת.

Snake Lemma -

$$\begin{tikzcd} (0 \arrow[r] &) A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' & (\to 0) \end{tikzcd}$$

כשהשורות מדויקות והתרשים חילופי נקבל סדרה מדויקת -

$(0\to)\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma\,(\to 0)$

$\delta$ - היחיד שאינו טריוויאלי, מוגדר ע"י קצת diagram chasing.

הסדרה המתקבלת "פונקטוריאלית" - אם יש העתקה מ- $A\dots C'$ למודולים אחרים נקבל העתקה מתאימה של (הומו') סדרות מדויקות (כולל חילופי).

הומ' מחבר -

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n^A"] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\partial_n^B"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

כאשר השורות מדויקות והעמודות קומפלקסים מקבלים סדרה מדויקת -

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(C) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A) \to \dots$$

אפשר לקבל פורמלית מלמת הנחש אבל יותר נוח לראות בדיאגרמה המקורית של סדרות. צריך לבדוק דיוק של $\delta$-ים.

גם כל הסדרה הזו פונקטוריאלית.

חשוב לדעת מתי פונקטור הוא מדויק (מעביר סדרה מדויקת למדויקת):

<u>תכונות דיוק של פונקטורים</u>

א. (1) $R$ חוג, $N$ $R$-מודול.

$0\to A\to B\to C$ מדויקת אז $0\to Hom_R(N,A)\to Hom_R(N,B)\to Hom_R(N,C)$ מדויקת.

(2) $\boxed{N,R \text{ כמו קודם}}$ $A\to B\to C\to 0$ מדויקת אז $0\to Hom_R(C,N)\to Hom_R(B,N)\to Hom_R(A,N)$

לכן אומרים ש- Hom <u>מדויק משמאל</u>.

(3) יהי $M$ $\mathbb{Z}$-מודול. אם $A\to B\to C\to 0$ מדויקת אז $A\otimes M\to B\otimes M\to C\otimes M\to 0$ מדויקת וגם המכפלה מימין שני (הן איז' כמובן).

הוכחה - ב Attiyah-McDonald עם adj. func. או הוכחה ישירה

אצל Bourbaki. <u>מדויק מימין</u>.

ב. (1) נניח $N\cong R^k$ חופשי נוצר סופית. $A\to B\to C$ מדויקת אז

$$\begin{matrix} Hom(N,A) & \to & Hom(N,B) & \to & Hom(N,C) \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ A^k & & B^k & & C^k \end{matrix}$$

מדויקת.

(2) אם $N\cong\mathbb{Z}^k$ אז $A\to B\to C$ מדויקת גורר $A\otimes N\to B\otimes N\to C\otimes N$ מדויקת.

# סדרות קצרות מתפצלות

I) נגדיר סכום ישר של R-מודולים - אם $X,Y,M$ R-מודולים ויש R-הומ'

$$X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{q} Y, \qquad Y \xrightarrow{j} M \xrightarrow{p} X$$

כך ש- $pj=qi=0$, $qj=id_Y$, $pi=id_X$, $ip+jq=id_M$.

נאמר ש- $i,j,p,q$ מציגים את $M$ כסכום ישר של $X,Y$.

(קונטרה-וריאנטי, גם - ההיפוך חצים)

<u>תכונות</u> אם $T$ פונקטור קו-וריאנטי נקבל תרשים דומה עם אותן תכונות ($T$ מעביר סכום ישר לסכום ישר).

II) אם $0\to X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{q} Y \to 0$ סדרה של R-מודולים - אז שקול:

א) הסדרה מדויקת וק"מ $Y \xrightarrow{j} M$ כך ש- $qj=id_Y$.

ב) הסדרה מדויקת וק"מ $M \xrightarrow{p} X$ כך ש- $pi=id_X$.

ג) ק"מ $p,j$ המשלימים את $i,q$ לתאור $M$ כסכום ישר של $X,Y$.

במצב כזה אומרים שהסדרה <u>מתפצלת</u> דרך $X,Y$.

<u>מסקנות</u> מתפצלת ← מדויקת.

פונקטורים מעבירים מתפצלת ← מתפצלת.

<u>דוגמה</u> אם $0\to A\to B\to C\to 0$ מדויקת (של R-מודולים) ו- $C$ R-מודול חופשי אז הסדרה מתפצלת. לפי תנאי א' (כי יש ל- $C$ R-בסיס ומספיק לשלוח כל איבר שם למקור שלו - ואפשר כי ההעתקה $B\to C$ על).

<u>הומוטופיה מכווצת</u>

הכללה של פיצול. $(A): \dots \to A_{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} A_m \xrightarrow{\partial_m} A_{m-1} \to \dots$

קומפלקס של R-מודולים. הומוטופיה מכווצת (של R) היא סדרה של R-הומ' $D_m$ כך ש- $\partial_{m+1}D_m + D_{m-1}\partial_m = id_{A_m}$.

<u>תכונות:</u> א. $H^n(A)=0$ לכל $n$. (אשר) $\alpha = id_A\alpha = \partial_{m+1}D_m\alpha + D_m\partial_{m-1}\alpha = \partial_{m+1}(\dots)$ לפי $\alpha\in\ker\partial_{m-1}$.

ב. פונקטור שולח סדרה עם הומ' מכווצת לסדרה עם הומ' מכווצת (גם של קומפלקסים).

במקרה נהגו להגיד גם במצב כזה אומרים שסדרה מתפצלת.