מורכבות חישובית 14

$$NPC \ni SAT = \{ \phi \mid \exists \overset{\text{השמה}}{\sigma} .\ \sigma(\phi) = 1 \}$$

$$3SAT = \left\{ \phi \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \in CNF_3 \\ \exists \sigma .\ \sigma(\phi) = 1 \end{array} \right\}$$

DNF $\vee$ של $\wedge$-ים | CNF $\wedge$ של $\vee$-ים

$$DSAT = \left\{ \phi \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \in DNF \\ \exists \sigma .\ \sigma(\phi) = 1 \end{array} \right\}$$

$$DSAT \in P$$

מספיק לבדוק על כל clause, דיסקונקציות הנה ספיק,
מספיק אחת ספיק

אבל $CNF \ni \phi$ קיימת המרה לצורת DNF

אם נניח $P \neq NP$, אזי ההמרה ארוכה באורך אקספוננציאלי

(בנוסף, נניח שקיימת מעבר פולינומי, אזי בהינתן 3CNF נמיר ל-DNF ? ונבדוק, ואז נקבל $P \neq NP$ (כי $NPC \ni 3CNF$).)

$$TDSAT = \left\{ \phi \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \in DNF \\ \forall \sigma\ \ \sigma(\phi) = 1 \end{array} \right\}$$

$$TDSAT \in Co\text{-}NP$$

תזכורת!

$$\overline{TDSAT} = \left\{ \phi \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \notin DNF \\ \text{או} \\ \exists \sigma\ \ \sigma(\phi) = 0 \end{array} \right\}$$

$\overline{TDSAT} \in NP$ כי ננחש השמה מפרכת.

$$C\text{-}CNF = \left\{ \langle \phi, k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \in CNF \\ \exists \sigma \quad N(\phi, \sigma) = k \end{array} \right\}$$

כמה ה- clauses מסופקים.

נראה: $C\text{-}CNF \leq_p 3\text{-}SAT$

כיוון ש $NPC \ni 3\text{-}SAT$ מספיק להראות

$C\text{-}CNF \in NP$.

אם כן המוודא מקבל השמה. בודק בזמן פולינומי האם

k clauses מסופקים.

נראה: $3\ SAT \leq_p C\text{-}CNF$

$$f(\phi) = \langle \phi, |\phi| \rangle$$

אם כל clause מסופק, ~~x~~ כל ה-clauses מסופקים

ולהיפך. זמן הרדוקציה לינארי.

$$C\text{-}DNF = \left\{ \langle \phi, k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \in DNF \\ \exists \sigma \quad N(\phi, \sigma) = k \end{array} \right\}$$

שים לב לפי דה מורגן $\phi \in CNF \Leftrightarrow \bar{\phi} \in DNF$

$\forall \sigma \quad \sigma(\phi) \neq \sigma(\bar{\phi})$

בהינתן $\langle \phi, k \rangle$ $CNF \ni \phi$

נחזיר $\langle \bar{\phi}, |\phi| - k \rangle$ $DNF \ni \bar{\phi}$

אם k מסופקים אז $C\text{-}DNF$ יהיה $\langle \bar{\phi}, |\phi| - k \rangle$

ולהפך אם $C\text{-}CNF$ יהיה $\langle \phi, k \rangle$

נשים לב $NP \ni C\text{-}DNF$ כי בודק יקבל השמה.

ולכן קיבלנו $NPC \ni C\text{-}DNF$

VC - vertex cover

בהינתן גרף $G=(V,E)$

כיסוי כך ש $U \in V$

$\forall (u,v) \in E$ $\quad u \in U$ or $v \in U$

Independent set

$IS\ (V,E)$ $\quad U \subseteq V$

$\forall u,v \in U \quad (u,v) \notin E$

$VC = \{ \langle G,k \rangle$ G has a VC of ~~s~~size $k \}$

$IS = \{ \ldots$ IS of size $k \}$

NPC ?

$VC \in NPC$

הוכחנו כי

$VC \in NPC$

[illegible] - קשה

[illegible]

$IS \leq_p VC$

$f(V,E,k) = (V,E,|V|-k)$

צ"ל

G has IS of size k $\longleftrightarrow$ G has a VC of size $|V|-k$

$\Leftarrow$ בהינתן VC בגודל $|V|-k$, יש k קודקודים.

שאינם בכיסוי הזה, אבל אין קשת בין ~~[illegible]~~ אף 2 מהם,

אחרת אחד מהקודקודים היה צריך להיות בכיסוי VC.

$\Rightarrow$ אם אין קשת בין אף 2 מתוך k, אז כל קשת

נוגעת לפחות באחד ~~[illegible]~~ מהקודקודים הנשארים,

לכן יש VC בגודל $|V|-k$.

∎

$$\text{Partition} = \left\{ S = \{x_1 \ldots x_n\} \;\middle|\; \exists B \subseteq S .\ \sum_{s \in B} s = \sum_{s \in (S \setminus B)} s \right\}$$

$$\text{BIN Packing} = \left\{ S = \{x_1, \ldots, x_n\}, B, m \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists S_1, \ldots, S_m .\ \bigcup_{i=1}^{m} S_i = S \\ \sum_{s \in S_i} s \leq B \ : i \ \text{ולכל} \end{array} \right\}$$

$BP \in NPC$

$BP \in NP$

קל, ננחש ונוודא.

$$\text{Partition} \leq_p BP$$

$$f(S) = S', \underbrace{B}_{\frac{\sum_{x \in S} x}{2}}, \underbrace{m}_{2}$$