נושאים מרכזיים השלמה 13

$Clique = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ has a } k \text{ sized clique} \}$

subset sum | $\{ \langle x_1, \ldots, x_n, t \rangle \mid \exists I \subseteq [1,n] . \sum_{i \in I} x_i = t \}$ $x_i \geq 0$

$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ has an } IS \text{ of size } k \}$

Independent Set

$co\text{-}NP = \{ L \mid \bar{L} \in NP \}$

רדוקציה בזמן פולינומיאלי :

$A \leq_p B$ אם קיימת f - חשיבה בזמן פולינומיאלי

כך ש $\forall w \in \Sigma^* \quad w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$

$NPC = \{ L \mid L \in NP . \forall M \in NP \quad M \leq_p L \}$

$A_{TM} \overset{?}{\in} NPC$

לא $A_{TM} \notin R$. אבל $NP \not\ni A_{TM}$

נוכיח $L \leq_p A_{TM}$ $\forall L \in NP$

<u>הוכחה</u>

$\exists$ TM $M . M$ decides L

נבנה ~~[illegible]~~ w, נגדיר $\langle M, w \rangle$ f ~~[illegible]~~ A_{TM}

אזי $w \in L$ ~~[illegible]~~ $\Leftrightarrow w \in L(M) \Leftrightarrow \langle M, w \rangle \in A_{TM}$ ..

ולכן -

$NPC \cap co\text{-}NP \neq \emptyset \Rightarrow NP = co\text{-}NP$ הוכחה

יהי $L \in NP$ ותהי $L' \in NPC \cap co\text{-}NP$

$\Rightarrow L \leq_p L' \Rightarrow \bar{L} \leq_p \bar{L'} \Rightarrow \bar{L} \in NP \Rightarrow L \in co\text{-}NP$

כי $NP \ni \bar{L'}$

נניח $L \in co\text{-}NP$ ~~$\Rightarrow$~~

$\bar{L} \in NP \Rightarrow \bar{L} \in co\text{-}NP \Rightarrow$ ~~$L \in NP$~~ $L \in NP$

$NP = co\text{-}NP$ מש"ל

$P = NP \Rightarrow NP = co\text{-}NP$

א) נניח בשלילה: $SAT \in NPC$, $SAT \in P$

$\Downarrow$

$\overline{SAT} \in P \Rightarrow \overline{SAT} \in co\text{-}NP$

$SAT \in NPC \cap co\text{-}NP \Rightarrow NP = co\text{-}NP$

ב) $L \in NP \Leftrightarrow L \in P \Leftrightarrow \bar{L} \in P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{L} \in NP \Leftrightarrow L \in co\text{-}NP$

הוכחה $Partition \in NPC = \left\{ x_1, \ldots, x_n \mid \exists S \subseteq [1,n] \; \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \notin S} x_i \right\}$, $x_i \geq 0$

ברור ש NP-ב

עד מעבר - [illegible]

S ,[illegible]

נעשה רדוקציה מ Subset Sum ל partition

$Subset \leq_p Partition$

בהינתן $\langle x_1, \ldots, x_n, t \rangle$ נסמן $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$

$f(x_1, \ldots, x_n, t) = (x_1, \ldots, x_n, k+t, 2k-t)$

[illegible]

אם $x_1 \ldots x_n, t \in Subset_{Sum}$ - אזי קיימת $I \subseteq [1,n]$ [illegible]

$\sum_{i \in I} x_i = t$ ולכן $\sum_{i \in I} x_i + 2k - t = 2k$

$\sum_{i \notin I} x_i + k + t = 2k - t + k + t = 2k$

אם $\exists S \subseteq \{x_1 \ldots x_n, k+t, 2k-t\}$ כך ש $\sum_{x_i \in S} x_i = 2k$

[illegible]

$\bar{S} \ni 2k-t$ אז $S \ni 2k-t$

[illegible]

$2k - (2k-t)$

[illegible]

$3k$ [illegible]

נקבל ש $k+t$ יהיה סכום הקבוצה השני $2k-t$

(אחרת יש מספר של $\{x_1 \ldots x_n\}$ שסכומם גדול מ- $3k$ בסתירה.)

לכן קיבלנו שהם מקיימים את $2k-t$ שמקיימת

ולכן ~~...~~ יש תת קבוצה של $\{x_1 \ldots x_n\}$

שסכומה $2k-(2k-t)=t$.

$$XS = \{x_1 \ldots x_n \mid \exists S \subseteq [1,n]$$

$$\sum_{i\in S} x_i + |\bar{S}| = \sum_{i\notin S} x_i + |S|\}$$

נוכיח כי $XS \in NPC$

$XS \in NP$ כי יש מוודא (ממש פשוט)

נראה $partition \leq_p XS$

$$\sum_{i\in S} x_i + |\bar{S}| = \sum_{i\notin S} x_i + |S|$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i\in S} (x_i - 1) = \sum_{i\in \bar{S}} (x_i - 1)$$

לכן הרדוקציה היא מ- partition

שכולה מורכבת ~~...~~ מהוספת 1 לכל איבר ב- XS.