

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

13 במרץ 2016

1 אינטגרל מסויים

חלוקה של הקטע $[a, b]$ היא אוסף נקודות

$$\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

סימון $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

בכל תת קטע $[x_{i-1}, x_i]$ נבחר נקודת דגימה t_i ונסמן $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$.
נגדיר את סכום רימן של הפונקציה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ביחס לחלוקה Π עם נקודות הדגימה $\vec{t}$:

$$S(f, \Pi, \vec{t}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i$$

פרמטר החלוקה (עדינות) של Π הוא $\lambda(\Pi) = \max \Delta x_i$.

סכום רימן הוא למעשה סכום שטחי מלבנים, ברוחב Δx_i ובגובה $f(t_i)$.
 f תיקרא אינטגרלית רימן בקטע $[a, b]$ אם קיים $I \in \mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π עם $\lambda(\Pi) < \delta$ ולכל בחירת של נקודות דגימה $\vec{t}$, מתקיים

$$|S(f, \Pi, \vec{t}) - I| < \varepsilon$$

במקרה זה נסמן

$$\int_a^b f(x) \, dx = I$$

סימון $R[a, b]$ - אוסף כל הפונקציות האינטגרליות בקטע $[a, b]$.

משפט 1.1 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מתקיים:

1. אם f אינטגרלית בקטע אזי היא חסומה בו.
2. אם f רציפה בקטע אזי היא אינטגרלית בו.
3. אם f מונוטונית בקטע אזי היא אינטגרלית בו.

תהי f חסומה בקטע $[a, b]$, ותהי Π חלוקה של $[a, b]$. לכל i נסמן

$$\begin{aligned} M_i &= \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ m_i &= \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

עבור תת קבוצה J בקטע, נסמן את התנודה של f בקטע J :

$$\omega(f, J) = \sup_{x \in J} f(x) - \inf_{x \in J} f(x)$$

התנודה בקטע מסויים בחלוקה:

$$\omega_i = M_i - m_i$$

התנודה של f ביחס לחלוקה Π של הקטע $[a, b]$ היא

$$\begin{aligned} \omega(f, \Pi) &= \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i = \overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) \end{aligned}$$

משפט 1.2 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. התנאים הבאים שקולים:

1. f אינטגרבילית רימן.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π עם $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

$$\omega(f, \Pi) < \varepsilon$$

3. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π כך שמתקיים

$$\omega(f, \Pi) < \varepsilon$$

תרגיל: הוכיחו שפונקציית דיריכלה

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

פתרון: תהי Π חלוקה כלשהי של $[0, 1]$. בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ קיימת נקודה רציונאלית ונקודה אי-רציונאלית, ולכן $\omega_i = 1$ לכל i . לכן,

$$\omega(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$$

כלומר לכל חלוקה Π זה מתקיים (אין תלות בעדינות). לכן f אינה אינטגרבילית רימן. **תרגיל:** נגדיר את פונקציית רימן:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

כאשר $\frac{p}{q}$ שבר מצומצם. הוכיחו כי $R(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[0, 1]$ וחשבו את האינטגרל

$$\int_0^1 R(x) dx$$

טענה 1.3 תהינה f, g אינטגרביליות בקטע $[a, b]$. אם f, g מזדהות על קבוצה צפופה בקטע, אזי

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

פתרון: יהי $\varepsilon > 0$. נמצא $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π עם $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים $\omega(f, \Pi) < \varepsilon$. נסמן בתור $N(\varepsilon)$ את מספר הנקודות בקטע $[0, 1]$ כך שמתקיים $R(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ (יש רק מספר סופי של נקודות כאלה). עבור $\delta > 0$ (שנבחר בהמשך) נסתכל על חלוקה Π של הקטע עם עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$. מצפיפות האי-רציונאליים, $m_i = 0$ לכל i . לכן יש לכל היותר $2N(\varepsilon)$ קטעים שבהם התנודה $\omega_i = M_i - m_i = M_i \geq \frac{\varepsilon}{2}$. נסמן

$$\begin{aligned} B &= B\left(f, \Pi, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \omega_i \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ G &= G\left(f, \Pi, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \omega_i < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \end{aligned}$$

כעת, נתבונן בסכום

$$\begin{aligned} \omega(f, \Pi) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i \in B} \omega_i \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in G} \omega_i \cdot \Delta x_i < \\ &< \delta \cdot \sum_{i \in B} 1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{i \in G} \Delta x_i \leq 2\delta N(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

נבחר

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4N(\varepsilon)}$$

R מזדהה עם הפונקציה הקבועה $f \equiv 0$ על הרציונאליים, שהם קבוצה צפופה, ולכן

$$\int_0^1 R(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx = 0$$

1.1 תכונות של אינטגרליות רימן

תהינה $f, g \in R[a, b]$. אזי:

1. עבור $c, d \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (cf + dg) = c \int_a^b f + d \int_a^b g$$

2. f אינטגרלית בכל תת קטע של $[a, b]$ ולכל $c \in (a, b)$ מתקיים

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. אם f אי שלילית, אזי גם האינטגרל שלה אי שלילי, ולכן אם $f \geq g$ האינטגרלים מקיימים אותו יחס:

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

4.

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

5.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

6. f^2 אינטגרבילית.

7. $f \cdot g$ אינטגרבילית.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו: אם f, g אינטגרביליות אזי $f \circ g$ אינטגרבילית.
פתרון: הטענה לא נכונה. נגדיר את f להיות פונקצית רימן, ואת g להיות הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

שתי הפונקציות אינטגרביליות, אבל ההרכבה לא.

טענה 1.4 תהי $f \in R[a, b]$ ותהי g רציפה בכל $\mathbb{R}$. אזי $g \circ f$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

הוכחה: f אינטגרבילית, ולכן חסומה - $|f| \leq M$. g רציפה בקטע $[-M, M]$ ולכן חסומה על ידי $L > 0$ וכן רציפה בו במידה שווה.
 יהי $\varepsilon > 0$. עבור $\varepsilon_1 > 0$ (שנבחר בהמשך) נמצא $\delta > 0$ כל שלכל $x, y \in [-M, M]$ עבורם $|x - y| < \delta$ מתקיים $|g(x) - g(y)| < \varepsilon_1$.
 תהי Π חלוקה של $[a, b]$. נסמן $G(\Pi, \delta)$ את אוסף הקטעים מהחלוקה שבהם $\omega(f, [x_{i-1}, x_i]) < \delta$. באופן דומה נסמן את $B(\Pi, \delta)$ - הקבוצה המשלימה.
 עבור $\varepsilon_2 > 0$ (שנבחר בהמשך), $f \in R[a, b]$, ולכן קיימת חלוקה Π שעבורה

$$\varepsilon_2 > \omega(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i \in B} \omega_i \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in G} \omega_i \cdot \Delta x_i$$

כעת מתקיים

$$\begin{aligned} \delta \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i &\leq \sum_{i \in B} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon_2 \\ \sum_{i \in B} \Delta x_i &< \frac{\varepsilon_2}{\delta} \end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned} \omega(g \circ f, \Pi) &= \sum_{i=1}^n \omega'_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i \in B} \omega'_i \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in G} \omega'_i \cdot \Delta x_i \leq \\ &\leq 2L \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i + \varepsilon_1 \cdot \sum_{i \in G} \Delta x_i \leq \frac{2L\varepsilon_2}{\delta} + \varepsilon_1(b-a) \end{aligned}$$

לכן, אם נבחר

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \varepsilon_2 = \frac{\delta \cdot \varepsilon}{4L}$$

נקבל בסך הכל

$$\omega(g \circ f, \Pi) < \varepsilon$$

■

ולכן ההרכבה אינטגרבילית.

משפט 1.5 (ערך הביניים האינטגרלי) אם $f, g \in R[a, b]$ כך שמתקיים $g \geq 0$ וכן f רציפה, אזי קיימת $c \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f \cdot g = f(c) \int_a^b g$$

הוכחה: f רציפה בקטע $[a, b]$ ולכן קיימים לה מינימום ומקסימום:

$$\begin{aligned} M &= \max_{[a,b]} f \\ m &= \min_{[a,b]} f \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$\begin{aligned} m \int_a^b g &\leq \int_a^b f \cdot g \leq M \int_a^b g \\ m &\leq \frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g} \leq M \end{aligned}$$

לכן, ממשפט ערך הביניים של חדוא 1, קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$f(c) = \frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g}$$

■

ובכך סיימנו.

משפט 1.6 תהי f רציפה בקטע $[a, b]$. אזי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

תרגיל: הוכיחו כי

$$\frac{2}{3\pi} \leq \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{\pi}$$

פתרון: בקטע המדובר $\sin x$ חיובית, ולכן

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{c} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx = \frac{2}{c}$$

עבור $c \in [2\pi, 3\pi]$ ולכן

$$\frac{2}{3\pi} \leq \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{\pi}$$

משפט 1.7 (ניוטון-לייבניץ) תהי $f \in R[a, b]$ ונגדיר

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

אזי:

1. F רציפה בקטע $[a, b]$.

2. אם f רציפה בנקודה $x_0 \in [a, b]$, אזי F גזירה בנקודה זו וכן $F'(x_0) = f(x_0)$.

משפט 1.8 נניח כי $f \in R[a, b]$ אם F קדומה של f אזי

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

הערה 1.9 התנאי על האינטגרביליות של f הכרחי - למשל

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הפונקציה גזירה בכל הקטע $[-1, 1]$ אבל נגזרתה לא חסומה שם, ולכן אינה אינטגרבילית.

תרגילים:

1. חשבו את $G'(x)$ עבור

$$G(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$$

נסמן $f(x) = e^{-x^2}$ ותהי F קדומה של f . ממשפט ניוטון-לייבניץ, $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(x^2)$ וכעת נגזור:

$$G'(x) = f(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} - f(x^2) \cdot 2x$$

2. תהי f גזירה בקטע $[a, b]$, המקיימת $f(a) = f(b) = 0$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ עבורה

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx$$

ממשפט ערך הביניים האינטגרלי קיימת $c_1 \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f(x) dx = f(c_1)(b-a)$$

c_1 רחוקה מלפחות אחד מהקצוות לכל היותר מרחק של $\frac{b-a}{2}$. בלי הגבלת הכלליות, נניח שהיא קרובה "יותר" לנקודה a . לכן

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| = |f(c_1)| = \left| \frac{f(c_1) - f(a)}{c_1 - a} (c_1 - a) \right| = (c_1 - a) |f'(c)| \leq \frac{b-a}{2} |f'(c_1)|$$

כאשר קיום הנקודה c מובטח ממשפט לגראנז'.

1.2 שיטות אינטגרציה

תרגיל: חשבו את

$$\int_1^e \ln x dx$$

פתרון: ממשפט ניוטון-לייבניץ יחד עם הקדומה שמצאנו בעבר,

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^e = 1$$

משפט 1.10 תהיינה u, v גזירות ברציפות בקטע $[a, b]$. אזי

$$\int_a^b uv' = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

תרגיל: חשבו את

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u' = \sin x & v = x \\ u = -\cos x & v' = 1 \end{array} \right] = -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = -2\pi + \sin x \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

משפט 1.11 עבור f רציפה מתקיים, עבור φ גזירה ברציפות,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b] \\ \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \end{array} \right] = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$$

דוגמאות:

1.

$$\int_0^1 (x-1)^{10} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right] = \int_1^2 t^{10} \, dt = \frac{t^{11}}{11} \Big|_1^2 = \frac{2^{11} - 1}{11}$$

2.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t \, dt \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \dots = \frac{\pi}{4}$$

3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right] = \int_0^? \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$$

תרגיל:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

פתרון לא מוצלח בהחלפת משתנים:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ -\frac{1}{t^2} dt = dx \end{array} \right] = - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

ולכאורה אינטגרל הוא 0. הבעיה היא בהחלפת המשתנים - היא לא מוגדרת באפס, והיא מעבירה את תחום האינטגרציה לקטע אחר לחלוטין.