

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

6 במרץ 2016

1 אינטגרל לא מסויים של פונקציות רציונאליות

הגדרה 1.1 יהיו P, Q פולינומים. פונקציה רציונאלית היא פונקציה מהצורה $R = \frac{P}{Q}$.

הגדרה 1.2 פונקציה רציונאלית שבה דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה נקראת פונקציה רציונאלית פשוטה.

1.1 פונקציות רציונאליות יסודיות

1.

$$\frac{A}{x-a}$$

2.

$$\frac{A}{(x-a)^n}, n \in \mathbb{N}$$

3.

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, p^2-4q < 0$$

4.

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, p^2-4q < 0, n \in \mathbb{N}$$

נפתור:

1.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + c$$

.2

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \left[\frac{t=x-a}{dt=dx} \right] = A \int \frac{dt}{t^n} = \frac{At^{-n+1}}{1-n} + c = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c$$

.3

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \left[a^2 = q - \frac{p^2}{4} \right] = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx = \left[\frac{x=t-\frac{p}{2}}{dx=dt} \right] = \\ &= A \int \frac{t}{t^2+a^2} dt - \left(A\frac{p}{2} - B \right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \left[\frac{s=\frac{t}{a}}{ds=\frac{dt}{a}} \right] = \\ &= \frac{A}{2} \ln(t^2+a^2) - \left(\frac{Ap}{2} - B \right) \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1+s^2} ds = \\ &= \frac{A}{2} \ln(t^2+a^2) - \left(\frac{Ap}{2} - B \right) \frac{1}{a} \arctan s + c = \\ &= \frac{A}{2} \ln \left(\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + a^2 \right) - \left(\frac{Ap}{2} - B \right) \frac{1}{a} \arctan \frac{x-\frac{p}{2}}{a} + c \end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx &= \left[a^2 = q - \frac{p^2}{4} \right] = \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + a^2 \right)^n} dx = \left[\frac{x=t-\frac{p}{2}}{dx=dt} \right] = \\ &= A \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n} dt - \left(A\frac{p}{2} - B \right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} \\ A \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n} dt &= \left[\frac{s=t^2+a^2}{ds=2t dt} \right] = \frac{A}{2} \int \frac{ds}{s^n} = \frac{A}{2(1-n)} s^{n-1} + c \\ I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} &= \left[\begin{matrix} u'=1 & v=\frac{1}{(t^2+a^2)^n} \\ u=t & v'=\frac{-2nt}{(t^2+a^2)^{n+1}} \end{matrix} \right] = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}} dt = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1} \\ I_{n+1} &= \frac{t}{(t^2+a^2)^n 2na^2} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n \\ \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx &= \frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) I_n \end{aligned}$$

מעשה והלאה, לא נפתור עד הסוף, אלא נביא לכדי מצב של שברים יסודיים, ומשם יש רק לעבוד כמו שהראינו עכשיו.

1.2 פונקציות רציונאליות כלליות

נסתמך על שתי עובדות:

1. כל פונקציה רציונאלית פשוטה אפשר לכתוב כסכום של פונקציות רציונאליות יסודיות.
2. כל פונקציה רציונאלית אפשר לכתוב כסכום של פולינום ופונקציה רציונאלית פשוטה.

1.2.1 חילוק ארוך של פולינומים

אם P, Q פולינומים כאשר $\deg P \geq \deg Q$, ניתן למצוא R, S פולינומים, כאשר $\deg R < \deg Q$, כך שמתקיים

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$$

דוגמאות:

1.

$$\begin{array}{r} x \\ x^3 - 2x - 1 \quad | \quad x^2 + 3 \\ \underline{x^3 + 3x} \\ -5x - 1 \end{array}$$

קיבלנו:

$$\frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 + 3} = \frac{x(x^2 + 3) - 5x - 1}{x^2 + 3} = x - \frac{5x + 1}{x^2 + 3}$$

2.

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ x^3 + 1 \quad | \quad x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{-x^2 - x} \\ x + 1 \\ \underline{x + 1} \\ 0 \end{array}$$

קיבלנו:

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^2 - x + 1$$

.3

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 3 \\
 \hline
 x^4 - 2x^3 \quad -1 \quad | \quad x^2 + 3 \\
 x^4 \quad + 3x^2 \\
 \hline
 -2x^3 - 3x^2 \quad -1 \\
 -2x^3 \quad -6x \\
 \hline
 -3x^2 + 6x -1 \\
 -3x^2 \quad -9 \\
 \hline
 6x + 8
 \end{array}$$

1.2.2 פירוק לשברים יסודיים

בהנתן פונקציה רציונאלית $R = \frac{P}{Q}$, כאשר $Q(x) = Q_1(x) \dots Q_m(x)$ עבור Q_j פולינומים אי פריקים, כלומר מהצורה $p^2 - 4q < 0$, $(x^2 + px + q)^n$, נרצה לכתוב את R כסכום של פונקציות רציונאליות יסודיות. כל גורם מהצורה $(x - a)^n$ יהפוך לסכום מהצורה

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

וכל גורם מהצורה $(x^2 + px + q)^n$ יהפוך לסכום מהצורה

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + px + q)^n}$$

דוגמאות:

.1

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A-B}{(x-1)(x+1)} \\
 A+B &= 0 \Rightarrow A = -B \\
 A-B &= 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\
 \frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}
 \end{aligned}$$

.2

$$\frac{x+3}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3}$$

עושים מכנה משותף ומציבים במונה נקודות כדי להקל על חיפוש המקדמים, למשל את הנקודות $x = 1, -1, 0, -3 \dots$ וכך מקבלים עוד ועוד משוואות עד שיש מספיק. בסוף מקבלים

$$A = \frac{5}{8}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{5}{8}, D = \frac{4}{3}, E = \frac{1}{2}$$

.3

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

ופותרים באותה צורה.

.4

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

דוגמא: חשבו

$$\int \frac{x^4}{x^3+x^2-x-1} dx$$

פתרון: נשים לב שעבור $x = 1$ נקבל במכנה 0, לכן נבצע חילוק פולינומים בין המכנה לבין $x-1$ נקבל

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2 + 2x + 1) = (x-1)(x+1)^2$$

ולכן האינטגרל הפך להיות

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

כעת נחלק את המונה במכנה חילוק פולינומים. נקבל

$$\frac{x^4}{x^3+x^2-x-1} = x-1 + \frac{2x^2-1}{x^3+x^2-x-1}$$

וכעת האינטגרל הוא

$$\int (x-1) dx + \int \frac{2x^2-1}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

נפרק את החלק הימני לשברים יסודיים.

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 1}{(x-1)(x+1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}\end{aligned}$$

נציב $x = 1$:

$$1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

נציב $x = -1$:

$$1 = -2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

נציב $x = 0$:

$$-1 = A - B - C = \frac{1}{4} - B + \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{7}{4}$$

לכן בסך הכל, האינטגרל שלנו הפך להיות

$$\int (x-1) dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

וכל החלקים כאן הם אינטגרלים שאנחנו יודעים לבצע, לכן נסיים כאן.

שאלה ממבחן: (סעיף 3ב מתוך מועד ב, סמסטר א 2014)
מצאו פונקציה קדומה לפונקציה

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2-1)(x+1)}$$

פתרון: נשים לב כי המכנה שווה לפולינום $x^3 + x^2 - x - 1$, ולכן נקבל

$$\frac{x^3}{(x^2-1)(x+1)} = 1 - \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x+1)^2}$$

נפרק את הגורם הימני לשברים חלקיים.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x+1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx - C}{(x-1)(x+1)^2} \\ x=1: -1 &= 4A \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \\ x=-1: 1 &= -2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \\ x=0: -1 &= A - B - C = -\frac{1}{4} - B + \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

לכן, בסך הכל, נקבל שהתרגיל הוא

$$\int f(x) dx = \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

ומכאן אנחנו יודעים לפתור.

1.3 שימושים לאינטגרלים של פונקציות רציונאליות

נסמן $R(f_1(x), \dots, f_k(x))$ את אוסף הפונקציות הרציונאליות שמערבות פעולות אריתמטיות בין הפונקציות $f_1(x), \dots, f_k(x)$.
נסמן $\int R(f_1(x), \dots, f_k(x)) dx$ את אוסף הפונקציות הקדומות (או האינטגרלים) של מסויימים של המשפחה הזו.

$$1. \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \text{ ההצבה המתאימה: } t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}. \text{ כעת}$$

$$x = \frac{b - t^m d}{t^m c - a}$$

דוגמאות:

(א)

$$\begin{aligned}\int \frac{x \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{2x + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} dx &= \left[dx = \frac{3t^2(t^3-1) - (1+t^3)3t^2}{(t^3-1)^2} dt = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} dt \right] = \\ &= \int \frac{\frac{1+t^3}{t^3-1}t}{2\frac{1+t^3}{t^3-1} + t} \cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} dt\end{aligned}$$

(ב)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \left[dt = \frac{t=\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, dx = 2t dt \right] = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t}$$

2. $\int R\left(x, \sqrt[m_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[m_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, ההצבה המתאימה: נסמן $n = lcm(m_1, \dots, m_k)$, וקעת $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ דוגמאות:

(א)

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{6t^t}{t^6(1+2t^3+t^2)} dt$$

3. הצבת אוילר: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$. נחלק למקרים:

(א) $a > 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2+bx+c} &= t - \sqrt{ax} \\ ax^2+bx+c &= t^2 - 2\sqrt{ax}t + ax^2 \\ x &= \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{at}} \end{aligned}$$

(ב) $c > 0$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

(ג) אם לפולינום שבשורש יש שני שורשים x_1, x_2 , מתקיים

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1) \cdot \sqrt{a \frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

וכעת ניתן להשתמש בשיטה למשפחה הראשונה שראינו.

דוגמאות:

i.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} = t-x \\ x = \frac{t^2-1}{2t-1} \\ dx = \frac{2t(2t-1)-2(t^2-1)}{(2t-1)^2} dt = \frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2} dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt \end{aligned}$$

4. הצבות טריגונומטריות: $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ההצבה המתאימה: $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \sin x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \\ x &= 2 \arctan t \\ dx &= \frac{2}{1 + t^2} dt\end{aligned}$$

דוגמאות:

(א)

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = [t = \tan \frac{x}{2}] = \int \left(\frac{1+t^2}{2t} \right)^3 \frac{2}{1+t^2} dt$$

(ב)

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x \cdot \cos^7 x dx &= \int \sin^6 x \cdot (1 - \sin^2 x)^3 \cos x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int t^6 (1 - t^2)^3 dt\end{aligned}$$

5. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ ההצבה המתאימה:

$$\begin{aligned}x &= a \sin t \\ dx &= a \cos t dt\end{aligned}$$

6. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ ההצבה המתאימה:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{\cos t} \\ dx &= \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt\end{aligned}$$

7. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ ההצבה המתאימה:

$$\begin{aligned}x &= a \tan t \\ dx &= \frac{a}{\cos^2 t} dt\end{aligned}$$