

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

28 בפברואר 2016

1 אינטגרל לא מסוים

בעיה: נתונה פונקציה $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. רוצים למצוא F כך שמתקיים $F' = f$. האם F יחידה? האם היא תמיד קיימת?

הגדרה 1.1 תהי $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. נקראת קדומה של f בקבוצה A אם לכל $x \in A$ מתקיים $F'(x) = f(x)$. מסמנים את האינטגרל הלא מסוים של f בקבוצה A בתור אוסף כל הפונקציות הקדומות: $\int f(x) dx$.

משפט 1.2 $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I קטע). אזי לנגזרת F' יש את תכונת ערך הביניים.

מסקנה 1.3 אם לפונקציה f אין את תכונת ערך הביניים בקטע אזי אין לה קדומה בקטע.

משפט 1.4 אם $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה אזי לנגזרת שלה אין נקודות אי רציפות סליקות או מסוג ראשון.

טענה 1.5 אם F_1, F_2 קדומות של f אז מתקיים $F_1 = F_2 + \text{const}$.

הוכחה:

$$F'_1 = f = F'_2 \Rightarrow (F_1 - F_2)' = F'_1 - F'_2 = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = \text{const}$$

■

אינטגרלים בסיסיים:

1.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

2.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

.3

$$\int e^x dx = e^x + c$$

.4

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

.5

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

.6

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

.7

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

.8

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

תרגיל: מצאו קדומות לפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

.1

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1) \\ 0 & x \in (2, 3) \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1 & x \in (0, 1) \\ c_2 & x \in (2, 3) \end{cases}$$

.2

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1) \\ 0 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1 & x \in (0, 1) \\ c_2 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

.3

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1) \\ 0 & x \in [1, 2) \end{cases}$$

לפונקציה f אין את תכונת ערך הביניים (למשל בקטע $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$), ולכן אין לה קדומה בקטע.

משפט 1.6 אם f רציפה בקטע I , יש לה קדומה בו.

טענה 1.7 אם לפונקציות f, g יש קדומות בקטע, אזי גם לפונקציות $f + g, \alpha f$ יש קדומות, ומתקיים:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\int \alpha f = \alpha \int f$$

תרגיל: חשבו את האינטגרלים הבאים:

.1

$$\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + \int dx = -\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x + c$$

.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} dx = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

.3

$$\int \frac{x^3-1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx = \int (x^2+x+1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

.4

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

.5

$$\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \, dx = \ln(1+x^2) + c$$

.6

$$\int x e^{\frac{x^2}{2}} \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' e^{\frac{x^2}{2}} \, dx = e^{\frac{x^2}{2}} + c$$

הערה 1.8 כמו בסעיף 4, ניתן לפתור אינטגרלים לא מסוימים מהצורה $\int \sin^n x \, dx, \int \cos^m x \, dx$.

טענה 1.9 לכל $f \neq 0$ גזירה מתקיים

$$\frac{f'}{f} = (\ln |f|)' \Rightarrow \int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$$

טענה 1.10 לכל f גזירה מתקיים

$$(e^f)' = f' e^f \Rightarrow \int f' e^f = e^f + c$$

1.1 שיטות אינטגרציה

1.1.1 אינטגרציה בחלקים

בהינתן u, v גזירות מתקיים

$$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow \int u'v = uv - \int v'u$$

תרגילים:

.1

$$\int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u' = \cos x & v = x \\ u = \sin x & v' = 1 \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

.2

$$\int x e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

.3

$$\int \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

.4

$$\int x^3 \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u' = x^3 & v = \ln x \\ u = \frac{x^4}{4} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right] = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$$

.5

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln^2 x dx &= \left[\begin{array}{ll} u' = x^3 & v = \ln^2 x \\ u = \frac{x^4}{4} & v' = \frac{2 \ln x}{x} \end{array} \right] = \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{1}{2} \int x^3 \ln x dx = \\ &= \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{x^4 \ln x}{8} + \frac{x^4}{32} + c \end{aligned}$$

.6

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx &= \left[\begin{array}{ll} u' = \frac{1}{\cos^2 x} & v = \ln \sin x \\ u = \tan x & v' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \end{array} \right] = \tan x \cdot \ln \sin x - \int dx = \\ &= \tan x \cdot \ln \sin x - x + c \end{aligned}$$

.7

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= \left[\begin{array}{ll} u' = 1 & v = \arctan x \\ u = x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c \end{aligned}$$

.8

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u' = \cos x & v = e^x \\ u = \sin x & v' = e^x \end{array} \right] = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \\ &= \left[\begin{array}{ll} s' = \sin x & t = e^x \\ s = -\cos x & t' = e^x \end{array} \right] = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx = \\ &= e^x (\sin x + \cos x) - I \Rightarrow I = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \end{aligned}$$

1.1.2 החלפת משתנים

טענה 1.11 תהי f בעלת קדומה F , $F(t) = \int f(t) dt$. עבור פונקציה g גזירה מתקיים

$$F(g(x)) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

הוכחה: מכלל השרשרת ומהעובדה שהפונקציה F קדומה של f :

$$(F(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

■

דרך נוחה לפרמל את הטענה האחרונה: מגדירים $t = g(x)$, מסמנים $dt = g'(x) dx$ וכותבים:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) = F(g(x))$$

תרגיל:

1.

$$\int (x-1)^{100} dx = \left[\begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix} \right] = \int t^{100} dt = \frac{t^{101}}{101} + c = \frac{(x-1)^{101}}{101} + c$$

2.

$$\int (2x+1)^{10} dx = \left[\begin{matrix} t = 2x+1 \\ dt = 2 dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int t^{10} dt = \frac{t^{11}}{22} + c = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + c$$

החלפת משתנים בכיוון ההפוך:

$$F(g(t)) = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

$$F(x) = \int f(x) dx$$

נרצה לפתור את המשוואה השנייה באמצעות הראשונה, וזה אפשרי אם g הפיכה, שכן אז מתקיים

$$F(x) = F(g(g^{-1}(x))) = F(g(t))$$

דוגמאות:

.1

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t}{(t^2+1)t} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= 2 \arctan t + c = 2 \arctan \sqrt{x} + c\end{aligned}$$

.2

$$\int x^2 (x^3+2)^{\frac{1}{5}} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^3+2 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{5}} dt = \frac{5t^{\frac{6}{5}}}{18} + c = \frac{5(x^3+2)^{\frac{6}{5}}}{18} + c$$

.3

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |\ln x| + c$$

.4

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x \cos x} &= \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \tan x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |\tan x| + c\end{aligned}$$

.5

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x^2+1}, x = \sqrt{t^2-1} \\ dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt \end{array} \right] = \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \\ &= \int \frac{1}{t^2-1} dt = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \frac{\ln(t-1) - \ln(t+1)}{2} + c = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right) + c\end{aligned}$$

.6

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x) dx &= \left[\begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array} \right] = \int e^t \sin t dt = \frac{e^t (\sin t - \cos t)}{2} + c = \\ &= \frac{x (\sin \ln x - \cos \ln x)}{2} + c\end{aligned}$$

.7

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

.8

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = \\ &= 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt = 6 \left(\int (t^2 - t + 1) dt - \int \frac{1}{t+1} dt \right) = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln(t+1) + c = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c \end{aligned}$$

.9 בתחום $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int (x - x^3) e^{x^2} dx &= \int x(1 - x^2) e^{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int (1 - t) e^t dt = \\ &= \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} (te^t - e^t) + c = e^t + \frac{te^t}{2} + c = e^{x^2} + \frac{t^2 e^{x^2}}{2} + c \end{aligned}$$

.10

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 2t - 2 \ln(t+1) + c = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + c \end{aligned}$$

.11

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = \int -(1 - t^2) dt = \\ &= -t + \frac{t^3}{3} + c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c \end{aligned}$$