

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

10 במרץ 2016

משפט 0.1 (ניוטון-לייבניץ) תהי $f \in R[a, b]$, ותהי $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, שלמעט במספר סופי של נקודות בה, $F' = f$, אזי

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

הוכחה: בהינתן חלוקה Π , ממשפט לגראנז', ניתן למצוא $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ כך שמתקיים

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$$

כאשר השוויון האחרון נכון אם נדרוש שנקודות אי הרציפות הן חלק מן החלוקה, ולכן משפט לגראנז' יבטיח לנו שהנקודות t_i הן פנימיות, ולכן בפרט אינן נקודות אי רציפות. כעת

$$S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^{n_\Pi} f(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n_\Pi} F'(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n_\Pi} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a)$$

ולכן מכיוון שהפונקציה אינטגרבילית, בבחירת נקודות מתאימות כמו שתיארנו,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}) = F(b) - F(a)$$

עבור סדרת חלוקות $\Pi^{(m)}$ שעדינותן שואפת לאפס, אחרי הוספת נקודות האי-רציפות. ■

מסקנה 0.2 אם $f, g \in R[a, b]$ כך שמתקיים גם $f', g' \in R[a, b]$ אזי מתקיים

$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt = f(t) \cdot g(t) \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t) \cdot g'(t) dt$$

הוכחה: נזכר כי $f \cdot g$ היא הקדומה של $f' \cdot g + g' \cdot f$. נבצע אינטגרציה ונקבל, לפי ניוטון-לייבניץ,

$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt + \int_a^b f(t) \cdot g'(t) dt = f(t) \cdot g(t) \Big|_{t=a}^{t=b}$$

■

מסקנה 0.3 (משפט בונה, גרסה שנייה) יהיו $f, g \in R[a, b]$, כאשר g רציפה וכן $f \in C^1[a, b]$ (רציפה וגזירה, כשגזרתה רציפה) וגם $f'(t) \geq 0$. אזי קיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = f(a) \cdot \int_a^{x_0} g(t) dt + f(b) \cdot \int_{x_0}^b g(t) dt$$

הוכחה: נסמן $G(x) = \int_a^x g(t) dt$. נשים לב שמשום שהפונקציה רציפה, ומהמשפט היסודי של החדו"א, $G'(x) = g(x)$. נשתמש באינטגרציה בחלקים. האינטגרלים שיופיעו קיימים בגלל הדרישות שלנו על f, g .

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = \int_a^b f(t) \cdot G'(t) dt = f(t) \cdot g(t) \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f'(t) \cdot G(t) dt$$

כעת נשתמש במשפט ערך הביניים האינטגרלי (f' חיובית, G רציפה).

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt &= f(b) \cdot G(b) - f(a) \cdot G(a) - G(x_0) \cdot \int_a^b f'(t) dt = \\ &= f(b) \cdot \int_a^b g(t) dt - G(x_0) \cdot (f(b) - f(a)) = \\ &= f(a) \cdot \int_a^{x_0} g(t) dt + f(b) \cdot \int_{x_0}^b g(t) dt \end{aligned}$$

■

כנדרש.

משפט 0.4 (טור טיילור + שארית אינטגרלית) תהי $f \in C^{n+1}[a, b]$. אזי

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n dt$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n .
 $n = 0$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

ולכן הבסיס נובע ממשפט ניוטון לייבניץ.
 נניח את נכונות הטענה עבור n ונוכיח עבור $n + 1$.

$$f(x) - \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i = f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) (x-a)^{n+1}$$

נפעיל את הנחת האינדוקציה ונקבל שהביטוי הזה שווה לביטוי הבא:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(x-t)^n dt - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) (x-a)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)} \frac{d}{dt} \left(-1 \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) dt - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

נפעיל אינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right] \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+2)}(t) \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} dt - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) (x-a)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x f^{(n+2)}(t) (x-t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

■

הערה 0.5 הסיבה ש"מותר לנו" לבצע אינטגרציה בחלקים היא שאנחנו מראים את המקרה $n + 1$ של הטענה, שבו ההנחה הבסיסית היא $f \in C^{n+2}[a, b]$.

הערה 0.6 הרווחנו מהמשפט הזה "נוסחא מדויקת".

טענה 0.7 (החלפת משתנה באינטגרל) תהי $f \in R([a, b])$ רציפה, ונניח $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ כך שמתקיים $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi \in C^1[\alpha, \beta]$ (לרוב נדרוש גם שהיא מונוטונית חזק). אזי

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

הוכחה: נגדיר $F = \int_a^x f(t) dt$. רציפה ולכן מהמשפט היסודי, $F' = f$. נסמן $G(y) = F(\varphi(y))$. לכן מכלל השרשרת:

$$G'(y) = F'(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) = f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)$$

נפעיל אינטגרציה על השוויון הזה:

$$\int_{\alpha}^{\beta} G'(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) dy$$

כמו כן, ממשפט ניוטון לייבניץ ומההנחות שלנו על φ , נקבל

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} G'(y) dy &= G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

■

ולכן הטענה נובעת.

שימושים: קצת פחות פורמלי.

1.

$$\begin{aligned} f &\in C^1[0, 2\pi] \\ M &= \sup_{[0, 2\pi]} |f'(t)| \\ \left| \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \right| &\leq \frac{2\pi M}{n} \end{aligned}$$

נוכיח זאת:

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \right| = \left| f(x) \cdot \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x) \cdot \frac{\sin(nx)}{n} dx \right| \leq 2\pi \frac{M}{n}$$

2. נוסחת ווליס (Wallis - 1655)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)} = \frac{\pi}{2}$$

הנקודה המרכזית

$$\int_0^{\frac{n}{2}} \sin^m(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(x) dx = I_m = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}, n!! = n(n-2)(n-4) \dots$$

נראה זאת:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{m-1} \, dx = -\cos x \cdot \sin^{m-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-2) \cos^2 x \cdot \sin^{m-2} x \, dx = \\
 &= (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m \\
 m I_m &= (m-1) I_{m-2} \\
 I_m &= \frac{m-1}{m} I_{m-2}
 \end{aligned}$$

ומכאן נובעת הנקודה המרכזית. נשים לב שבקטע המדובר,

$$0 \leq (\sin x)^{2n+1} \leq (\sin x)^{2n} \leq (\sin x)^{2n-1}$$

נבצע על כך אינטגרציה:

$$\begin{aligned}
 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &\leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \\
 a_n = \frac{(2n)!! (2n)!!}{(2n-1)!! (2n+1)!!} &\leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!! (2n-2)!!}{(2n-1)!! (2n-1)!!} = b_n
 \end{aligned}$$

כעת מתקיים:

$$a_n - b_n \leq \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2}$$

ומשום שהסדרות מונוטוניות הן מתכנסות, ולכן הגבול שלהן הוא $\frac{\pi}{2}$.