

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

8 במרץ 2016

טענה 0.1 יהיו $c \in \mathbb{R}, f, g \in R[a, b]$

$$1. \quad f + g \in R[a, b]$$

$$2. \quad c \cdot f \in R[a, b]$$

$$3. \quad |f| \in R[a, b]$$

$$4. \quad f^2 \in R[a, b]$$

$$5. \quad f \cdot g \in R[a, b]$$

הוכחה: נוכיח לפי הסדר.

1. נשים לב:

$$\begin{aligned} \omega(f + g, J) &= \sup_{x \in J} (f + g)(x) - \inf_{x \in J} (f + g)(x) = \sup_{x, y \in J} ((f + g)(x) - (f + g)(y)) = \\ &= \sup_{x, y \in J} ((f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))) \leq \sup_{x \in J} (f(x) - f(y)) + \sup_{x \in J} (g(x) - g(y)) = \\ &= \omega(f, J) + \omega(g, J) \end{aligned}$$

כעת, בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר חלוקה Π כך שמתקיים

$$\omega(f, \Pi), \omega(g, \Pi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

וכעת מתקיים

$$\omega(f + g, \Pi) \leq \omega(f, \Pi) + \omega(g, \Pi) < \varepsilon$$

2. $c > 0$:

$$\omega(c \cdot f, J) = \sup_{x \in J} (c \cdot f)(x) - \inf_{x \in J} (c \cdot f)(x) = c \left(\sup_{x \in J} f(x) - \inf_{x \in J} f(x) \right) = c \cdot \omega(f, J)$$

כעת, עבור Π שמקיימת $\lambda(\Pi) < \frac{\varepsilon}{c}$:

$$\omega(c \cdot f, J) = c \cdot \omega(f, J) < \varepsilon$$

$$c < 0$$

$$\omega(-f, J) = \omega(f, J)$$

ומכאן הטענה נובעת על ידי כפל בסקלר $-c > 0$.

3.

$$\omega(|f|, J) = \sup_{x, y \in J} (|f(x)| - |f(y)|) \leq \sup_{x, y \in J} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in J} (f(x) - f(y)) = \omega(f, J)$$

נבחר כעת חלוקה Π עבורה $\omega(f, \Pi) < \varepsilon$ ויתקיים

$$\omega(|f|, \Pi) \leq \omega(f, \Pi) < \varepsilon$$

4. f אינטגרבילית, ולכן חסומה. נניח $|f| < M$. אזי מתקיים:

$$\omega(f^2, J) = \sup_{x, y \in J} (f^2(x) - f^2(y)) = \sup_{x, y \in J} ((f(x) - f(y))(f(x) + f(y))) \leq \sup_{x, y \in J} (2M(f(x) - f(y)))$$

לכן מתקיים

$$\omega(f^2, \Pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f^2, \Delta x_i) \cdot |\Delta x_i| \leq 2M \cdot \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta x_i) \cdot |\Delta x_i| = 2M \cdot \omega(f, \Pi)$$

כעת נבחר חלוקה Π שעבורה $\omega(f, \Pi) < \frac{\varepsilon}{2M}$ ויתקיים

$$\omega(f^2, \Pi) \leq 2M \cdot \omega(f, \Pi) < \varepsilon$$

למעשה, אם H רציפה וכן f אינטגרבילית, אזי $H \circ f$ אינטגרבילית. את זה נראה בתרגול. לעומת זאת, כתרגיל בית ניתן לנסות להוכיח זאת עבור H גזירה ברציפות (על ידי משפט לגראנז').

5. מתקיים

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

ולכן הטענה נובעת מטענות 1,3.

■

1 על ערך האינטגרל

הגדרה 1.1 $A \subseteq [a, b]$ נקראת צפופה אם לכל קטע פתוח $(c, d) \subseteq [a, b]$ מתקיים

$$A \cap (c, d) \neq \emptyset$$

הערה 1.2 אם $h \in R[a, b]$ אזי לכל סדרה של חלוקות $\Pi^{(m)}$ כך שמתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\Pi^{(m)}) = 0$$

ולכל בחירה של נקודות מתאימות $\{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}$ מתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S\left(f, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}\right) = \int_a^b h(x) \, dx$$

טענה 1.3 תהיינה $f, g \in R[a, b]$ ונניח שעבור $A \subseteq [a, b]$ צפופה מתקיים $f|_A = g|_A$. אזי

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$$

הוכחה: נבחר סדרה של חלוקות $\Pi^{(m)}$ כך שמתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\Pi^{(m)}) = 0$$

ונבחר נקודות מתאימות $\{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}$ (תמיד ניתן לבצע זאת שכן A צפופה). f, g מזדהות על A ולכן בפרט על הנקודות המתאימות, לכן

$$S\left(f, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}\right) = S\left(g, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}\right)$$

ועל ידי השאפת m לאינסוף נקבל את הנדרש. ■

טענה 1.4 (לינאריות האינטגרל באינטגרנד) יהיו $f, g \in R[a, b]$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. אזי

$$\int_a^b (c \cdot f + g) = c \cdot \int_a^b f + \int_a^b g$$

הוכחה: נבחר סדרה של חלוקות $\Pi^{(m)}$ כך שמתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\Pi^{(m)}) = 0$$

וסדרה של נקודות מתאימות $\{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}$, וכעת יתקיים:

$$\begin{aligned} S\left(c \cdot f + g, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}\right) &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(c \cdot f(t_i^{(m)}) + g(t_i^{(m)})\right) \cdot |\Delta x_i^{(m)}| = \\ &= c \cdot \sum_{i=1}^{N_m} f(t_i^{(m)}) \cdot |\Delta x_i^{(m)}| + \sum_{i=1}^{N_m} g(t_i^{(m)}) \cdot |\Delta x_i^{(m)}| = \\ &= c \cdot S\left(f, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}\right) + S\left(g, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}\right) \end{aligned}$$

■

וכאשר ניקח גבול, נקבל את הנדרש.

2 האינטגרל כשטח

משפט 2.1 (חיוביות) תהי $f \in R[a, b]$ אזי $0 \leq f$

$$\int_a^b f \geq 0$$

הוכחה: לכל חלוקה ולכל נקודות מתאימות,

$$S(f, \Pi, \{t_i\}) \geq 0$$

■

ומאחר ואי־שוויון חלש נשמר בגבול, הטענה נובעת.

מסקנה 2.2 (מונוטוניות האינטגרל) תהייה $f, g \in R[a, b]$ כך שמתקיים $f \leq g$ בכל הקטע. אזי

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

הוכחה: $g - f \geq 0$ ולכן

$$0 \leq \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

■

טענה 2.3 (לינאריות האינטגרל בתחום האינטגרציה) תהי $f \in R[a, b]$ ויהי $b \in (a, c)$. אזי

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

הוכחה: נבחר סדרה של חלוקות $\Pi^{(m)}$ כך שמתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\Pi^{(m)}) = 0$$

וכן לכל m , מתקיים $b \in \Pi^{(m)}$. נבחר סדרה של נקודות מתאימות $\{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}$. נסמן

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(m)} &= \Pi^{(m)} \cap [a, b], & \Pi_2^{(m)} &= \Pi^{(m)} \cap [b, c] \\ \{t_i^{(m),1}\}_{i=1}^{N_{m,1}} &= \{t_i^{(m)}\} \cap [a, b], & \{t_i^{(m),2}\}_{i=1}^{N_{m,2}} &= \{t_i^{(m)}\} \cap [b, c] \end{aligned}$$

כעת, מתקיים

$$S\left(f, \Pi^{(m)}, \{t_i^{(m)}\}_{i=1}^{N_m}\right) = S\left(f|_{[a,b]}, \Pi_1^{(m)}, \{t_i^{(m),1}\}_{i=1}^{N_{m,1}}\right) + S\left(f|_{[b,c]}, \Pi_2^{(m)}, \{t_i^{(m),2}\}_{i=1}^{N_{m,2}}\right)$$

■

ניקח גבול ונקבל את הנדרש.

הגדרה 2.4 עבור $a > b$, נסמן

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

כעת, לכל שלוש נקודות a, b, c יתקיים

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

משפט 2.5 תהי $f \in R[a, b]$. נגדיר

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

אזי F רציפה.

הוכחה: נניח $|f| < M$. יהי $h \in \mathbb{R}$ כך שערכו המוחלט קטן מספיק. כעת,

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^{x+h} f \right| \leq \left| \int_x^{x+h} M \right| = M|h|$$

ולכן נקבל

$$\lim_{h \rightarrow 0} |F(x+h) - F(x)| = 0$$

■

אי-שוויון שימושי: תהי $f \in R[a, b]$ חסומה מלמעלה על ידי M ומלמטה על ידי m .

$$\begin{aligned} -\int_a^b |f| &\leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \\ m(b-a) &\leq \int_a^b f \leq M(b-a) \end{aligned}$$

3 משפט ערך ביניים

משפט 3.1 תהי $f \in R[a, b]$ ותהי $g \in R[a, b]$ אזי קיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f \cdot g = f(x_0) \cdot \int_a^b g$$

הוכחה: נסמן $M = \max f, m = \min f$, כעת,

$$\begin{aligned} m \cdot g(x) &\leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \\ m \int g &\leq \int f \cdot g \leq M \int g \end{aligned}$$

בלי הגבלת הכלליות, $\int g \neq 0$ (אם כן, כל נקודה בקטע מקיימת את הטענה).

$$m \leq \frac{\int f \cdot g}{\int g} \leq M$$

וממשפט ערך הביניים לפונקציות רציפות, קיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$f(x_0) = \frac{\int f \cdot g}{\int g}$$

■

משפט 3.2 (הלמה של בונה (Bonnet), גרסה ראשונה) תהינה $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח כי f מונוטונית וכן כי g אינטגרבילית ואי־שלילית, אזי קיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f \cdot g = f(a) \cdot \int_a^{x_0} g + f(b) \cdot \int_{x_0}^b g$$

משפט 3.3 (הלמה של בונה (Bonnet), גרסה שנייה) תהינה $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח כי f גזירה ונגזרתה אי־שלילית, וכן כי g רציפה, אזי קיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f \cdot g = f(a) \cdot \int_a^{x_0} g + f(b) \cdot \int_{x_0}^b g$$

את ההוכחות לשתי הגרסאות נראה בהמשך.

4 המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

משפט 4.1 (המשפט היסודי) תהי $f \in R[a, b]$ ונגדיר

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

נניח שבנקודה $x_0 \in [a, b]$ f רציפה. אזי מתקיים

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

הוכחה:

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f$$

יהי $\varepsilon > 0$. מרציפות, נבחר $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

כעת, מתקיים

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon = \varepsilon$$

ולכן

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x_0)$$

■

משפט 4.2 (ניוטון-לייבניץ) תהי $f \in R[a, b]$ ותהי $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיים $F' = f$. אזי

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$