

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

3 במרץ 2016

משום שראינו שחסימות היא תנאי הכרחי לאינטגרביליות רימן, נניח מעתה שהפונקציה f מוגדרת על קטע סגור וסופי, והיא חסומה. המטרה כעת היא להראות את קריטריון דרבו המשופר עבור $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה, שאומר שמתקיים $f \in R([a, b])$ אם ורק אם

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Pi \mid \overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) < \varepsilon$$

נחזור על הגדרות שראינו בשיעור שעבר:

הגדרה 0.1 עבור $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה, כאשר J קטע, נגדיר את התנודה של f ביחס לקטע J :

$$\omega(f, J) = \sup_{x \in J} f - \inf_{x \in J} f$$

תרגיל: הוכח כי מתקיים

$$\omega(f, J) = \sup_{x, y \in J} (f(x) - f(y))$$

הגדרה 0.2 נגדיר את התנודה של f ביחס לחלוקה Π :

$$\omega(f, \Pi) = \sum \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i$$

למה 0.3 בהנתן חלוקה Π , נסמן $\Pi' = \Pi \cup \{p\}$, כאשר $p \in [x_{i-1}, x_i]$. אזי מתקיים:

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f, \Pi) &\leq \overline{\sum}(f, \Pi') + \omega(f, [a, b]) \cdot \lambda(\Pi) \\ \underline{\sum}(f, \Pi) &\geq \underline{\sum}(f, \Pi') - \omega(f, [a, b]) \cdot \lambda(\Pi) \end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sup_{x \in [x_{i-1}, p]} f \cdot (p - x_{i-1}) - \sup_{x \in [p, x_i]} f \cdot (x_i - p) = \\
&= (x_i - p) \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f - \sup_{x \in [p, x_i]} f \right) + (p - x_i) \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f - \sup_{x \in [x_{i-1}, p]} f \right) \leq \\
&\leq \omega(f, [a, b]) \cdot \lambda(\Pi)
\end{aligned}$$

■

אי השוויון השני נובע באופן סימטרי לחלוטין.

מסקנה 0.4 עבור $\Pi' = \Pi \cup \{p_1, \dots, p_m\}$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum}(f, \Pi) &\leq \overline{\sum}(f, \Pi') + m \cdot \omega(f, [a, b]) \cdot \lambda(\Pi) \\
\underline{\sum}(f, \Pi) &\geq \underline{\sum}(f, \Pi') - m \cdot \omega(f, [a, b]) \cdot \lambda(\Pi)
\end{aligned}$$

טענה 0.5 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π בעלת $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\overline{\sum}(f, \Pi) &\geq \bar{I}(f) \geq \overline{\sum}(f, \Pi) - \varepsilon \\
\underline{\sum}(f, \Pi) &\leq \underline{I}(f) \leq \underline{\sum}(f, \Pi) + \varepsilon
\end{aligned}$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$.

1. מהגדרת $\bar{I}(f)$ בתור אינפימום, קיימת חלוקה Π_0 של $[a, b]$ עבורה

$$\overline{\sum}(f, \Pi_0) \geq \bar{I}(f) \geq \overline{\sum}(f, \Pi_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן בתור m את מספר הנקודות בחלוקה Π_0 .

2. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2m\omega(f, [a, b])}$ ותהי Π חלוקה של $[a, b]$ עם $\lambda(\Pi) < \delta$.

3. נגדיר חלוקה $\Pi' = \Pi \cup \Pi_0$. מן המסקנה נובע

$$\overline{\sum}(f, \Pi) \leq \overline{\sum}(f, \Pi') + m\lambda(\Pi)\omega(f, [a, b])$$

כעת, בגלל בחירת λ ומשום שהחלוקה Π עדינה מספיק,

$$m\lambda(\Pi)\omega(f, [a, b]) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

כמו כן, משום שהחלוקה Π' היא עידון של Π_0 ,

$$\overline{\sum}(f, \Pi') \leq \overline{\sum}(f, \Pi_0)$$

ולכן בסך הכל

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f, \Pi) &\leq \overline{\sum}(f, \Pi') + m\lambda(\Pi)\omega(f, [a, b]) \leq \overline{\sum}(f, \Pi_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \bar{I} + \varepsilon \end{aligned}$$

ובכך סיימנו. הוכחת אי השוויון השני סימטרית.

■

מסקנה 0.6 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. נניח שמתקיים $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$. אזי $f \in R([a, b])$.
הוכחה: נשתמש במשפט שהוכחנו כדי לבחור δ כך שלכל חלוקה Π בעלת עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

$$\overline{\sum}(f, \Pi) - \frac{\varepsilon}{3} \leq \bar{I}(f) = \underline{I}(f) \leq \underline{\sum}(f, \Pi) + \frac{\varepsilon}{3}$$

קיבלנו שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π בעלת עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

$$\overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) < \varepsilon$$

■

ולכן $f \in R([a, b])$.

מסקנה 0.7 (קריטריון דרבו המשופר) נניח שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π כך שמתקיים

$$\overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) < \varepsilon$$

אזי מכיוון שמתקיים

$$\underline{\sum}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \overline{\sum}(f, \Pi)$$

כך נקבל

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$$

ולכן, מהמסקנה הקודמת, f אינטגרבילית.

טענה 0.8 אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אזי היא אינטגרבילית.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. f רציפה במידה שווה בקטע הסגור $[a, b]$ (משפט קנטור), ולכן קיים $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

בהנתן חלוקה Π בעלת עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$,

$$\omega(f, [a, b]) = \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b - a} \Delta x_i = \varepsilon$$

ולכן הטענה נובעת מקריטריון דרבו. ■

טענה 0.9 אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית אזי היא אינטגרבילית.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות כי f עולה ולא קבועה.
תרגיל: במקרה זה

$$\omega(f, [x, y]) = f(y) - f(x)$$

יהי $\varepsilon > 0$. נקח

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

עבור חלוקה Π בעלת עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$, מתקיים

$$\begin{aligned} \omega(f, \Pi) &= \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon \end{aligned}$$

ושוב, הטענה נובעת מקריטריון דרבו. ■

טענה 0.10 (איחוד קטעים זרים) תהי $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$. נניח כי עבור $a < b < c$ מתקיים

$$\begin{aligned} f &\in R([a, b]) \\ f &\in R([b, c]) \end{aligned}$$

אזי $f \in R([a, c])$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. מקריטריון דרבו המשופר קיימות חלוקות Π_0 של $[a, b]$ וכן Π_1 של $[b, c]$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned}\omega(f|_{[a,b]}, \Pi_0) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \omega(f|_{[b,c]}, \Pi_1) &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

ולכן $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$ היא חלוקה של $[a, c]$ שעבורה

$$\omega(f, [a, b]) = \omega(f|_{[a,b]}, \Pi_0) + \omega(f|_{[b,c]}, \Pi_1) < \varepsilon$$

ולכן, מקריטריון דרבו המשופר, f אינטגרבילית. ■

טענה 0.11 (תת קטע) תהי $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. עבור $a < b < c$ מתקיים

$$f \in R([a, c]) \Rightarrow f \in R([a, b]), f \in R([b, c])$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. מדרבו המשופר נבחר Π_0 חלוקה של $[a, c]$ שעבורה $\omega(f, \Pi_0) < \varepsilon$. נוסיף לה את b : $\Pi_1 = \Pi_0 \cup \{b\}$. עדיין מתקיים $\omega(f, \Pi_1) < \varepsilon$. כעת נצמצם אותה על $[a, b]$ ועל $[b, c]$ בהתאמה, ונקבל את מה שרצינו להוכיח מדרבו המשופר. ■

טענה 0.12 תהי $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. אם לכל $b \in [a, c]$ מתקיים $f \in R([a, b])$, $f \in R([a, c])$ גם מתקיים.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $b = c - \frac{\varepsilon}{2\omega(f, [a, c])}$. מהנתון $f \in R([a, b])$, ולכן מדרבו המשופר קיימת חלוקה Π_1 של $[a, b]$ שעבורה $\omega(f, [a, b]) < \frac{\varepsilon}{2}$. כעת נגדיר $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{b\}$ חלוקה של $[a, c]$, ועבורה מתקיים

$$\omega(f, \Pi_2) \leq \omega(f|_{[a,b]}, \Pi_1) + \frac{\varepsilon}{2\omega(f, [a, c])} \cdot \omega(f, [a, c]) \leq \varepsilon$$

ולכן הטענה נובעת מקריטריון דרבו המשופר. ■

מסקנה 0.13 שינוי של פונקציה בנקודה אחת לא משפיע על האינטגרביליות שלה.

הוכחה: נובע משלושת הטענות האחרונות. ■

טענה 0.14 יהיו $f, g \in R([a, b])$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. אזי:

1.

$$cf \in R([a, b])$$

.2

$$f + g \in R([a, b])$$

.3

$$|f| \in R([a, b])$$

.4

$$f^2 \in R([a, b])$$

.5

$$f \cdot g \in R([a, b])$$

תרגיל: להוכיח את הטענה.