

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

1 במרץ 2016

משפט 0.1 תהי $f \in R[a, b]$ (אינטגרלית רימן). אזי f חסומה.

הוכחה: נשתמש בהגדרה עבור $\varepsilon = 1$. קיים I וקיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π עם $\lambda(\Pi) < \delta$ ולכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים

$$I - 1 < S(f, \Pi, \{t_i\}) < I + 1$$

נבחר חלוקה Π_0 עם $\lambda(\Pi_0) < \delta$. אילו (בשליטה) f לא חסומה, קיים i_0 כך שהפונקציה $f|_{\Delta x_{i_0}}$ אינה חסומה. נבחר נקודות מתאימות $t_1^0, t_2^0, \dots, t_{i_0}^0 = t, \dots, t_n^0$ בתת הקטעים של החלוקה. מההגדרה נובע

$$\begin{aligned} I - 1 < S(f, \Pi_0, \{t_i^0\}) &= \sum_{i=1, i \neq i_0}^n f(t_i^0) |\Delta x_i| + |\Delta x_{i_0}| f(t) < I + 1 \\ \frac{I - 1 - \sum_{i=1, i \neq i_0}^n f(t_i^0) |\Delta x_i|}{|\Delta x_{i_0}|} &< f(t) < \frac{I + 1 - \sum_{i=1, i \neq i_0}^n f(t_i^0) |\Delta x_i|}{|\Delta x_{i_0}|} \end{aligned}$$

■

כלומר $f|_{\Delta x_{i_0}}$ חסומה (בסתירה).

1 סכומי דרבו (Darboux)

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה, ותהי Π חלוקה של הקטע $[a, b]$. נגדיר את סכום דרבו העליון ואת סכום דרבו התחתון של f ביחס לחלוקה Π :

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f, \Pi) &= \sum_{i=1}^n M_i |\Delta x_i| \\ \underline{\sum}(f, \Pi) &= \sum_{i=1}^n m_i |\Delta x_i| \end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in \Delta x_i} f(x) \\ m_i &= \inf_{x \in \Delta x_i} f(x) \end{aligned}$$

הערה 1.1 לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$, מתקיים

$$\underline{\sum}(f, \Pi) \leq S(f, \Pi, \{t_i\}) \leq \overline{\sum}(f, \Pi)$$

למה 1.2 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה, Π חלוקה של $[a, b]$. אזי מתקיים

$$\begin{aligned} \sup_{\{t_i\}} (S(f, \Pi, \{t_i\})) &= \overline{\sum}(f, \Pi) \\ \inf_{\{t_i\}} (S(f, \Pi, \{t_i\})) &= \underline{\sum}(f, \Pi) \end{aligned}$$

הוכחה: נוכיח את הראשון, השני מתקבל באופן סימטרי. מההערה,

$$\sup_{\{t_i\}} (S(f, \Pi, \{t_i\})) \leq \overline{\sum}(f, \Pi)$$

יהי $\varepsilon > 0$. לכל i נבחר נקודה $t \in \Delta x_i$ כך שמתקיים $f(t) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$ ונחשב:

$$\begin{aligned} S(f, \Pi, \{t_i\}) &= \sum_{i=1}^n f(t_i) |\Delta x_i| \geq \sum_{i=1}^n \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) |\Delta x_i| = \\ &= \sum_{i=1}^n M_i |\Delta x_i| - \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta x_i| = \overline{\sum}(f, \Pi) - \varepsilon \end{aligned}$$

■

למה 1.3 (מונוטוניות) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהיינה חלוקות $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ של $[a, b]$. אזי מתקיים

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f, \Pi_1) &\geq \overline{\sum}(f, \Pi_2) \\ \underline{\sum}(f, \Pi_1) &\leq \underline{\sum}(f, \Pi_2) \end{aligned}$$

הוכחה: מסופיות החלוקה (באינדוקציה), מספיק להראות זאת עבור $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{p\}$. נסמן $\Pi_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ונניח כי $p \in \Delta x_i$. כעת,

$$\begin{aligned} \overline{\sum}(f, \Pi_1) - \overline{\sum}(f, \Pi_2) &= M_i |\Delta x_i| - \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, p]} f(x) (p - x_{i-1}) + \sup_{x \in [p, x_i]} f(x) (x_i - p) \right) \geq \\ &\geq M_i |\Delta x_i| - M_i (p - x_{i-1}) - M_i (x_i - p) = M_i \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

■

אי השוויון השני נובע באופן סימטרי.

מסקנה 1.4 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1, Π_2 חלוקות כלשהן. אזי מתקיים

$$\underline{\sum}(f, \Pi_1) \leq \overline{\sum}(f, \Pi_2)$$

הוכחה: נגדיר $\Pi_3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$. כעת מתקיים $\Pi_1, \Pi_2 \subseteq \Pi_3$ ולכן, מן הלמה,

$$\underline{\sum}(f, \Pi_1) \leq \underline{\sum}(f, \Pi_3) \leq \overline{\sum}(f, \Pi_3) \leq \overline{\sum}(f, \Pi_2)$$

■

הגדרה 1.5 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. נגדיר את האינטגרל העליון ואת האינטגרל התחתון של f :

$$\begin{aligned}\bar{I}(f) &= \inf_{\Pi} \overline{\sum}(f, \Pi) \\ \underline{I}(f) &= \sup_{\Pi} \underline{\sum}(f, \Pi)\end{aligned}$$

משפט 1.6 (קריטריון דרבו לאינטגרליות רימן) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. $f \in R[a, b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π עם $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

$$\overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) < \varepsilon$$

הערה 1.7 הערך המספרי I אינו נמצא בקריטריון זה.

הוכחה: כיוון ראשון: נניח $f \in R[a, b]$ עם אינטגרל I . יהי $\varepsilon > 0$. לפי הגדרת אינטגרל רימן קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π עם $\lambda(\Pi) < \delta$ ולכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים

$$|S(f, \Pi, \{t_i\}) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

מכאן שמתקיים

$$\begin{aligned}\overline{\sum}(f, \Pi) &= \sup_{\{t_i\}} (S(f, \Pi, \{t_i\})) \leq I + \frac{\varepsilon}{3} \\ \underline{\sum}(f, \Pi) &= \inf_{\{t_i\}} (S(f, \Pi, \{t_i\})) \geq I - \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

ומכאן

$$\overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

כיוון שני: נניח שהפונקציה f מקיימת את קריטריון דרבו. ראשית נראה כי $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$.
 אכן $\bar{I}(f) \geq \underline{I}(f)$ כפי שכבר ראינו.
 יהי $\varepsilon > 0$. לפי קריטריון דרבו $\delta > 0$ וחלוקה Π_0 עם $\lambda(\Pi) < \delta$ כך שמתקיים

$$\overline{\sum}(f, \Pi_0) - \underline{\sum}(f, \Pi_0) < \varepsilon$$

ולכן מתקיים

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) < \varepsilon$$

ומשום שבחרנו $\varepsilon > 0$ שרירותי,

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$$

נסמן $I = \bar{I}(f) = \underline{I}(f)$.
 כעת, יהי $\varepsilon > 0$. נבחר את δ לפי קריטריון דרבו. תהי Π חלוקה עם $\lambda(\Pi) < \delta$ ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות לה. כעת:

$$\begin{aligned} S(f, \Pi, \{t_i\}) &\leq \overline{\sum}(f, \Pi) < \underline{\sum}(f, \Pi) + \varepsilon \leq \underline{I}(f) + \varepsilon = I + \varepsilon \\ S(f, \Pi, \{t_i\}) &\geq \underline{\sum}(f, \Pi) > \overline{\sum}(f, \Pi) - \varepsilon \geq \bar{I}(f) - \varepsilon = I - \varepsilon \end{aligned}$$

ובסך הכל קיבלנו

$$|S(f, \Pi, \{t_i\}) - I| < \varepsilon$$

■

הגדרה 1.8 נגדיר את התנודה של פונקציה ביחס לקטע Δx_i :

$$\omega(f, \Delta x_i) = M_i - m_i = \sup_{x \in \Delta x_i} f(x) - \inf_{x \in \Delta x_i} f(x)$$

הגדרה 1.9 נגדיר את התנודה של פונקציה ביחס לחלוקה Π :

$$\omega(f, \Pi) = \overline{\sum}(f, \Pi_0) - \underline{\sum}(f, \Pi_0) = \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta x_i) |\Delta x_i|$$