

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

© ארזים

25 בפברואר 2016

### 1 הקדמה - ניוטון/לייבניץ נגד היוונים

#### 1.1 "בעיית השטח"

שטח של מלבן שאורכי צלעותיו הם  $a, b$  הוא  $a \cdot b$ . אם נרצה לחשב שטח מתחת לגרף של פונקציה  $f(x)$  בקטע בין הנקודה  $a$  לנקודה  $b$ , נחלק את הקטע  $[a, b]$  לקטעים קטנים יותר ונקרב את השטח בעזרת מלבנים. ככל שנחלק את הקטע לקטעים קטנים יותר, נקבל דיוק טוב יותר.

#### 1.2 "בעיית הפונקציה הקדומה"

בהנתן פונקציה  $f(x)$  רוצים למצוא פונקציה  $F(x)$  כך שמתקיים  $F'(x) = f(x)$ .

אם נסמן את השטח מתחת לגרף של הפונקציה  $f(x)$  בקטע שבין הנקודה  $a$  לנקודה  $x$  בתור  $S(x)$ , ונסתכל על  $S(x+h)$ :

$$\begin{aligned} S(x+h) - S(x) &\cong f(x_0) \cdot h, x_0 \in [x, x+h] & (: h) \\ \frac{S(x+h) - S(x)}{h} &\cong f(x_0) & \left( \lim_{h \rightarrow 0} \right) \\ S'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

כך למעשה יצרנו שקילות בין בעיית השטח ובעיית הפונקציה הקדומה.

#### 1.3 דוגמה

נסמן בתור  $A$  את השטח של הפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0, 1]$ . נחלק את הקטע  $[a, b]$  לקטעים קטנים יותר:

$$\left\{ \left[ 0, \frac{1}{n} \right], \left[ \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right], \dots, \left[ \frac{n-1}{n}, 1 \right] \right\} = \left\{ \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \mid 1 \leq i \leq n \right\}$$

נבחר את המלבנים פעמיים: פעם אחת בגובה של הקצה הימני של הקטע (נסמן את סכום השטחים של המלבנים הללו  $\overline{A_n}$ ), ופעם שנייה בגובה של הקצה השמאלי של הקטע (נסמן את סכום השטחים של המלבנים הללו  $\underline{A_n}$ ).

כעת נקבל:

$$\begin{aligned}\underline{A_n} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ \overline{A_n} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2\end{aligned}$$

הנחה:  $\underline{A_n} \leq A \leq \overline{A_n}$   
נשים לב שמתקיים:

$$\overline{A_n} - \underline{A_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

בנוסף,  $\overline{A_n}$  סדרה יורדת וחסומה, בעוד  $\underline{A_n}$  סדרה עולה וחסומה, ולכן שתיים מתכנסות, וממשפט הסנדוויץ',  $A$  שווה לגבול המשותף שלהן.  
תזכורת לנוסחא מהתיכון:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

כעת:

$$\overline{A_n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \rightarrow \frac{1}{3} \leftarrow \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \underline{A_n}$$

מסקנה:

$$A = \frac{1}{3}$$

## 2 אינטגרלים ואינטגרביליות

### 2.1 פונקציות קדומות

**הגדרה 2.1** בהינתן שתי פונקציות  $f, F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  נאמר שהפונקציה  $F$  פונקציה קדומה (antiderivative) של  $f$  אם מתקיים  $F'(x) = f(x)$  לכל  $x \in (a, b)$ . אם מדובר בקטע סגור  $[a, b]$ , נדרוש גם  $F'_+(b) = f(b)$ ,  $F'_-(a) = f(a)$ .

**הערה 2.2** כל שתי פונקציות קבועות נבדלות בקבוע. הסבר: נניח שיש שתי קדומות,  $F_1, F_2$ .  
כעת:

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = \text{const}$$

מסמנים:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

**הערה 2.3** אין דרך לחשב פונקציות קדומות.

**הערה 2.4** יש פונקציות שאין להן פונקציה קדומה אלמנטרית.

**הערה 2.5** יש פונקציות שאין להן פונקציה קדומה.

ניזכר כי לפי משפט דרבו, הנגזרת מקיימת את תכונת ערך הביניים.

## 2.2 אינטגרל רימאן

**הנחה:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על קטע סופי וסגור.

**הגדרה 2.6** חלוקה של הקטע  $[a, b]$  היא אוסף סופי של נקודות  $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  כד שמתקיים  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

**הגדרה 2.7** נסמן  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  אורך הקטע שמספרו  $i$  בחלוקה.

**הגדרה 2.8** עדינות של חלוקה  $\Pi$  מוגדרת באופן הבא:  $\lambda(\Pi) = \max_{i=1, \dots, n} (\Delta x_i)$ .

**הגדרה 2.9** חלוקה  $\Pi_2$  נקראת עידון של החלוקה  $\Pi_1$  אם מתקיים  $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$  (באופן שקול, עידון של חלוקה מתקבל על ידי הוספת מספר סופי של נקודות לחלוקה נתונה). במצב זה מתקיים  $\lambda(\Pi_2) \leq \lambda(\Pi_1)$ .

**הגדרה 2.10** אוסף  $\{t_i\}$  נקרא נקודות מתאימות לחלוקה  $\Pi$  אם לכל  $1 \leq i \leq n$  מתקיים  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

**הגדרה 2.11** סכום רימאן של פונקציה  $f(x)$  ביחס לחלוקה  $\Pi$  עם נקודות מתאימות  $\{t_i\}$  מוגדר להיות

$$S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

זהו למעשה סכום שטחי המלבנים בעלי גובה  $f(t_i)$  ורוחב  $\Delta x_i$ .

**הגדרה 2.12** פונקציה  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת אינטגרלית רימאן בקטע  $[a, b]$  (והאינטגרל שלה שווה לערך  $I$ ) אם מתקיים:

$$\exists I (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall \Pi (\lambda(\Pi) < \delta \Rightarrow \forall \{t_i\} (|S(f, \Pi, \{t_i\}) - I| < \varepsilon)))$$

מסמנים

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

### "בעיות":

1. יותר מדי כמתים.
2. מי זה  $I$ ? איך מוצאים אותו?
3. איך מוכיחים את התנאי עבור "כל החלוקות" (העדינות מספיק)?

**טענה 2.13**  $f(x) = c$  אינטגרבילית רימאן,  $I = c(b-a)$ .

**הוכחה:** קיים  $I = c(b-a)$  כך שלכל  $\varepsilon > 0$ , קיים  $\delta = 17$  כך שלכל חלוקה  $\Pi$  עם  $\lambda(\Pi) < \delta$  ולכל בחירה של נקודות מתאימות מתקיים:

$$|S(f, \Pi, \{t_i\}) - I| = \left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - c(b-a) \right| = \left| c \sum_{i=1}^n \Delta x_i - c(b-a) \right| = |c(b-a) - c(b-a)| = 0 < \varepsilon$$

■

**טענה 2.14** פונקציית דיריכלה

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

בקטע  $[0, 1]$  אינה אינטגרבילית רימאן.

**הוכחה:** לכל עדינות  $\delta$  נבחר חלוקה  $\Pi$  כך שמתקיים  $\lambda(\Pi) < \delta$ , ונבחר פעם אחת נקודות מתאימות רציונאליות, ופעם אחרת נקודות מתאימות אי-רציונאליות. בפעם הראשונה נקבל  $S(D, \Pi, \{t_i\}) = 1$ , ובפעם השנייה  $S(D, \Pi, \{t_i\}) = 0$ . עבור  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , לא קיים מספר  $I$  שקרוב לשני המספרים הללו עד כדי  $\varepsilon$ .

■