

רשימת משפטים לחדוו"א 1 עם סודין

רשימת משפטים מותרים לשימוש בבחינה של מיכאל סודין בחדוו"א 1

1 אקסיומות

1. אקסיומות החיבור:

1. קיימות המספר הנייטרלי לחיבור 0
2. לכל מספר קיים האיבר הנגדי כך שסכומם שווה 0
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ אסוציאטיביות
4. $x + y = y + x$ קומוטטיביות

2. אקסיומות הכפל:

1. קיימות המספר הנייטרלי לכפל 1
2. לכל מספר שונה מ-0 קיים האיבר ההופכי כך שמכפלתם שווה 1
3. $(x * y) * z = x * (y * z)$ אסוציאטיביות
4. $x * y = y * x$ קומוטטיביות

3. דיסטריבוטיביות: $(x + y) * z = x * z + y * z$

4. אקסיומות הסדר: $\leq$

1. $x \leq x$
2. $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
3. $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
4. היחס קטן שווה קיים בין כל שני איברים
5. $x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z$
6. $0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow 0 \leq x * y$
7. $x \leq y \wedge 0 \leq z \rightarrow x * z \leq y * z$
8. $x \leq y \wedge z \leq 0 \rightarrow y * z \leq x * z$

5. אקסיומות פיאנו:

1. מספר טבעי
2. לכל מספר x קיים x' יחיד כך ש' $x' + 1 = x$ נקרא העוקב של x
3. לכל מספר טבעי x $x' \neq 1$
4. אם $x' = y'$ אז $x = y$
5. אקסיומת האינדוקציה: כל תת-קבוצה של N שמכילה את 1 וגם אינדוקטיבית (אם x בקבוצה אז x' בקבוצה) שווה ל- N

2 הגדרות

1. N, R מוגדרות לפי האקסיומות
2. $Z = \{x \in X \mid (x \in N) \vee (-x \in N) \vee (x = 0)\}$
3. $Q = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0\}$
4. $d(x, y) = |x - y|$
5. $(a = \text{Max}X) := (a \in X \wedge \forall x \in X. x \leq a)$
6. $(a = \text{Min}X) := (a \in X \wedge \forall x \in X. x \geq a)$
7. $M_X := \{c \in R \mid \forall x \in X. c \geq x\}$
8. $L_X := \{c \in R \mid \forall x \in X. c \leq x\}$
9. קבוצה תקרא חסומה מלמעלה אם $M_X \neq \emptyset$
10. קבוצה תקרא חסומה מלמטה אם $L_X \neq \emptyset$
11. קבוצה תקרא חסומה אם היא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה
12. $\text{Sup}X := \min M_X$
13. $\text{Inf}X := \max L_X$
14. $\lceil x \rceil = \min\{c \in Z \mid c \geq x\}$
15. $\lfloor x \rfloor = \max\{c \in Z \mid c \leq x\}$
16. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$
17. $(a, b) \subset R = \{x \in R \mid a < x < b\}$
18. $[a, b] \subset R = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$
19. $[a, b) \subset R = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$
20. $(a, b] \subset R = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$
21. קבוצה $S = \{Y_a\}_{a \in A}$ תיקרא כיסוי של X אם: $X \subset \bigcup_{a \in A} Y_a$
22. קבוצה U תקרא תת כיסוי של X אם קיים כיסוי של X S כך ש: $U \subset S$
23. סביבה של x : כל קטע פתוח I המכיל את x
24. סביבה מנוקבת של x : אם I סביבה של x אז $I \setminus \{x\}$ סביבה מנוקבת של x
25. $X \subset R$ תהי קבוצה נקודה p תקרא נקודת הצטברות אם בכל סביבה של p יש אינסוף נקודות מ X או באופן שקול בכל סביבה מנוקבת של p לפחות נקודה אחת מ X
26. סדרה $\{x_n\}$ תקרא מתכנסת לגבול a אם: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in N. \forall n \geq N_1 |x_n - a| < \varepsilon$ ומסמנים $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

27. סדרה $\{x_n\}$ תקרא מונוטונית לא יורדת אם מתקיים: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ ואם מתקיים אי שוויון חזק תקרא מונוטונית עולה (ממש)

28. סדרה $\{x_n\}$ תקרא מונוטונית לא עולה אם מתקיים: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$ ומתקיים אי שוויון חזק תקרא מונוטונית יורדת (ממש)

29. $\{x_n\}$ תקרא סדרת קושי אם: $\forall \varepsilon > 0. \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_1. |x_n - x_m| < \varepsilon$

$$\underline{x}_n = \inf_{m \geq n} x_m \quad 30.$$

$$\overline{x}_n = \sup_{m \geq n} x_m \quad 31.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} x_m \quad 32.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} x_m \quad 33.$$

34. הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל- $+\infty$ אם: $\forall M < \infty \exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_1. x_n \geq M$

35. הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל- $-\infty$ אם: $\forall M > -\infty \exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_1. x_n \leq M$

36. סדרה $\{x_n\}$ נקראת מתכנסת מלמעלה ל- L אם היא מתכנסת ל- L ולכל i סופי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq x_i$

37. סדרה $\{x_n\}$ נקראת מתכנסת מלמטה ל- L אם היא מתכנסת ל- L ולכל i סופי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x_i$

38. סדרה תקרא מתכנסת במובן הרחב אם קיים לה גבול סופי או $\pm\infty$

39. תהי $\{x_n\}$ סדרה תת סדרה של $\{x_n\}$ היא כל סדרה שמתקבלת מ- $\{x_n\}$ על ידי השמטת איברים ושמירה על הסדר כל עוד נשארים אינסוף איברים

40. גבול חלקי: L יקרא גבול חלקי של $\{x_n\}$ אם קיימת לסדרה תתסדרה המתכנסת ל- L קבוצת הגבולות החלקיים מסומנת $PL(\{x_n\})$

41. טור הוא סכום אינסופי של איברים מסדרה $\{x_n\}$ ומסומן: $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$

42. סכום חלקי של טור של איברי הסדרה $\{x_n\}$ מוגדר $S_n = \sum_{j=1}^n x_j$

43. טור יקרא מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}$ מתכנסת וסכום הטור מוגדר $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

44. טור לייבניץ: נניח שסדרה x_n מונוטונית חיובית ומתכנסת ל-0 אז הטור $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j x_j$ נקרא טור לייבניץ

45. טור נקרא מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ מתכנס

46. טור יקרא מתכנס על תנאי אם הוא מתכנס אבל הוא לא מתכנס בהחלט

47. טור $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ יקרא סידור מחדש של הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ אם כל איבר בטור הראשון מופיע בדיוק פעם אחת בטור השני ולהיפך, נניסוח אחר $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך שלכל $x_n = y_{\varphi(n)} \quad n \in \mathbb{N}$

$$x^+ = \max(a, 0), x^- = \max(-a, 0) \quad .48$$

$$U_\delta^*(a) = \{x : 0 < |x - a| < \delta\} \text{ סביבת } \delta \text{ מנוקבת של } a \text{ מסומנת} \quad .49$$

.50 גבול של פונקציה לפי קושי: תהי $f : E \rightarrow R$ פונקציה המוגדרת על הסט E ותהי a נקודת הצטברות של E אזי הגבול של f ב a $\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = L$ אם:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0. \forall x \in U_\delta^*(a) \cap E. |f(x) - L| < \varepsilon$
הגבול בנקודה a לא תלוי בהערך של f ב a או בהאם f מוגדרת ב a

$$.51 \text{ אם } E = (a, b), b > a \text{ אז הגבול מלמעלה המסומן :} \lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) := \lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x)$$

$$.52 \text{ אם } E = (a, b), b > a \text{ אז הגבול מלמטה המסומן :} \lim_{x \uparrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) := \lim_{E \ni x \rightarrow b} f(x)$$

.53 הגדרת הגבול לפי היינה : תהי a נקודת הצטברות של E ותהי $f : E \rightarrow R$ אזי הדברים הבאים שקולים:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.1$$

2. לכל סדרה $\{x_n\}$ המתכנסת ל a כך ש $x_n \in E \setminus \{a\}$ לכל $n \in N$ הסדרה $\{f(x_n)\}$ מתכנסת ל L

3. לכל סדרה $\{x_n\}$ המתכנסת ל a כך ש $x_n \in E \setminus \{a\}$ לכל $n \in N$ הסדרה $\{f(x_n)\}$ מתכנסת

$$.54 \text{ תהי } f \text{ פונקציה המוגדרת לכל } x \text{ גדול מ } x_0 \text{ כלשהו אזי נאמר ש } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ אם:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x > M. |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$.55 \text{ תהי } f \text{ פונקציה המוגדרת לכל } x \text{ קטן מ } x_0 \text{ כלשהו אזי נאמר ש } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \text{ אם:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x < -M. |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$.56 \text{ נאמר ש } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ אם: } \forall M > 0 \exists \delta > 0. \forall x \in U_\delta^*(a). f(x) > M$$

$$.57 \text{ נאמר ש } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ אם: } \forall M > 0 \exists \delta > 0. \forall x \in U_\delta^*(a). f(x) < -M$$

$$.58 \sup_E f = \sup\{f(x) | x \in E\}$$

$$.59 \inf_E f = \inf\{f(x) | x \in E\}$$

$$.60 \text{ הפונקציה } f \text{ תיקרא אינפיניטיסמאלית קטנה ב } a \text{ אם מתקיים } \lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ לעיתים}$$

$$\text{תסומן } o(1)$$

$$.61 \text{ יהיו } f, g : E \rightarrow R \text{ פונקציות ותהי } a \text{ נקודת הצטברות של } E \text{ אנחנו אומרים ש } f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a \text{ אם } f(x) = \alpha(x) * g(x), x \rightarrow a \text{ ו } \alpha(x) \text{ קטנה אינפיניטיסמאלית}$$

$$\text{באופן שקול } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$.62 \text{ אנחנו אומרים ש } f, g \text{ שוות ב } a \text{ אם } f \sim g, x \rightarrow a \text{ אם } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ ניתן גם לכתוב}$$

$$f(x) = g(x) + o(g(x))$$

63. הפונקציה f המוגדרת בסביבה של a תקרא רציפה ב- a אם מתקיים $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
 באופן שקול מתקיים: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0. \forall x \in U_\delta(a). |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

64. אם f רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת נאמר ש- f רציפה בכל מקום

$$f(a+0) = \lim_{x \downarrow a} f(x) \quad 65.$$

$$f(a-0) = \lim_{x \uparrow a} f(x) \quad 66.$$

67. נאמר של נקודת אי רציפות סליקה ב- a אם f לא רציפה ב- a ומתקיים

$$f(a+0) = f(a-0)$$

68. נאמר של נקודת אי רציפות לא סליקה ב- a אם f לא רציפה ב- a ומתקיים
 $f(a+0) \neq f(a-0)$ באותה קטגוריה נכנסים גם מצבים שאחד מהגבולות
 $\pm\infty$ שווה

69. נסמן ב- $C(E)$ את קבוצת הפונקציות הרציפות ב- E

70. הפונקציה $f: E \rightarrow R$ תקרא רציפה במידה שווה ב- E אם:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0. \forall x, y. |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

71. נגזרת: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה פתוחה של x תיקרא דיפרציאבילית ב- x
 אם קיים הגבול $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$ שייקרא הנגזרת של f
 ב- x . f גזירה בקטע הפתוח (a, b) אם היא גזירה בכל נקודה בקטע

$$\Delta f(x, \varepsilon) = f(x + \varepsilon) - f(x), \Delta x = y - x = \varepsilon \quad 72.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} \quad 73.$$

$$f'(b-0) = \lim_{y \uparrow b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, f'(a+0) = \lim_{y \downarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \quad [a, b] \quad 74.$$

75. פונקציה תיקרא גזירה n פעמים ב- x אם קיימות n הנגזרות הראשונות ב- x נגזרת ה- n
 תסומן $f^{(n)}$

76. $C^n(I)$ היא קבוצת הפונקציות הגזירות n פעמים ב- $C^\infty(I)$ קבוצת הפונקציות
 שגזירות אינסוף פעמים

77. נאמר של נקודת אקסטרמום ב- x_0 אם מתקיים אחד מהדברים

$$\forall x \in U(x_0). f(x) \leq f(x_0)$$

$$\forall x \in U(x_0). f(x) \geq f(x_0)$$

78. תהי $f: I \rightarrow R$ תקרא קמורה ב- I אם מתקיים עבור התנאים הבאים:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2. \forall x_1 \leq x \leq x_2$$

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \quad 1.$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad 2.$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad 3. \text{ אחד מהאי שוויונות הבאים}$$

$$f'_-(x) = \lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad 79.$$

$$f'_+(x) = \lim_{t \downarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad .80$$

81. פונקציה $f : I \rightarrow R$ תקרא קעורה אם הפונקציה $-f$ קמורה

82. נאמר שלפונקציה f n נגזרות ב x_0 אם היא גזירה $n-1$ פעמים בסביבה של x_0 והנגזרת החית קיימת ב x_0

83. פולינום טיילור של הפונקציה f סביב x_0 מוגדר $P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$

84. השארית של פולינום טיילור מוגדרת $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

85. אומרים ש f שווה לטור טיילור שלה אם מתקיים $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$

86. R תקרא פונקציה רציונאלית אם קיימים פולינומים $P, Q \in R[x]$ כך ש $R = \frac{P}{Q}$

87. התכנסות ב C זהה להתכנסות ב R חוץ מהעובדה שהחלק הממשי והמדומה כל אחד מהם בנפרד מתכנס

88. תהי $R = \frac{P}{Q}$ אז קבוצת הקטבים של R היא קבוצת האפסים של Q

89. תהי $R = \frac{P}{Q}$ ונניח של P ו Q אין אפסים משותפים אז $\deg R = \max\{\deg P, \deg Q\}$

90. תהי $R = \frac{P}{Q}$ ונניח של P ו Q אין אפסים משותפים ונניח ש a קוטב של R אז הריבוי של a מוגדר להיות הריבוי שלו כאפס של Q

91. תהי $R = \frac{P}{Q}$ ו a קוטב של R מריבוי m אז השברים החלקיים של R לפי a הם:

$$A_1, \dots, A_m \in C \text{ כאשר } \frac{A_1}{z-a}, \frac{A_2}{(z-a)^2}, \dots, \frac{A_m}{(z-a)^m}$$

$$z \in C. e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad .92$$

$$z \in C. \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad .93$$

$$z \in C. \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad .94$$

$$z \in C. \sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad .95$$

$$z \in C. \cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad .96$$

3 משפטים ומסקנות

1. אי שוויון ברנולי: $\forall x > -1, n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$
2. אי שוויון המשולש:
 1. $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$
 2. $|x-y| \geq ||x| - |y||$
 3. $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$
3. המקסימום והמינימום אם קיימים הם יחידים
4. לכל קבוצה חסומה מלמעלה יש סופרימום ולכל קבוצה חסומה מלמטה יש אינפיום
5. הסופרימום והאינפיום אם קיימים הם יחידים
6. לכל תת-קבוצה של $\mathbb{Z}$ החסומה יש מקסימום ומינימום
7. $\mathbb{N}$ לא חסומה מלמעלה ו- $\mathbb{Z}$ לא חסומה לא מלמעלה ולא מלמטה
8. לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים ויחיד $k \in \mathbb{Z}$ $k \leq x \leq k+1$
9. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}. 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$
10. $h \geq 0 \forall \varepsilon \in \mathbb{N}. h \leq \frac{1}{n} \rightarrow h = 0$
11. $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}, a \neq b. \exists r \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$
12. $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}, a \neq b. \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap (a, b)$
13. הלמה של קנטור: לכל קבוצת קטעים סגורים I כך ש: $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$
 $\exists c \in \mathbb{R}. \bigcap_{n \geq 1} I_n = \{c\}$ ואם בנוסף $b_n - a_n \rightarrow 0$ אזי: $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$
14. הלמה של היינה בורלי: לכל כיסוי של קטע סגור $[a, b]$ על ידי קבוצת קטעים פתוחים קיים תת כיסוי סופי
15. הלמה של בולצאנו ווישטראס: לכל קבוצה אינסופית חסומה $X \subset \mathbb{R}$ יש נקודת הצטברות
16. אם לסדרה יש גבול הוא יחיד
17. אם סדרה מתכנסת אז היא חסומה
18. יהיו $\{x_n\}, \{y_n\}$ שתי סדרות כך שהסט $\{n \in \mathbb{N} | x_n \neq y_n\}$ הוא סופי ו
 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ אז $\{y_n\}$ גם מתכנס ו $a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
19. אם $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ אז:
 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n * y_n) = a * b$
 3. אם $b \neq 0$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$
20. יהיו $\{x_n\}, \{y_n\}, \{c_n\}$ סדרות כך שקיים N_1 ש $\forall N \ni n \geq N_1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ו $x_n \leq c_n \leq y_n$

21. אם סדרה $\{x_n\}$ מונוטונית לא יורדת או עולה ממש אז $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$

22. אם סדרה $\{x_n\}$ מונוטונית לא עולה או יורדת ממש אז $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf x_n$

23. לכל $q > 1$ אם $x_n = \frac{n}{q^n}$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

24. לכל $q > 0$ אם $x_n = \frac{q^n}{n!}$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

26. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} * \sum_{k=1}^n x_k = a$

27. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = a$

28. אם $x_n > 0$ ו $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = a$

29. ניוטון רפסון: אם $a > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$

30. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \approx 2.71828$

31. סדרה היא מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי

32. $\bar{x}_n \geq \underline{x}_n$

33. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n$

34. אם $\{x_n\}$ מתכנס ל a אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = a$

35. בולצאנו ווישטראס2: לכל סדרה חסומה תת סדרה מתכנסת

36. בולצאנו ווישטראס2 מורחב: לכל סדרה יש תת סדרה המתכנסת במובן הרחב

37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = \max(PL(\{x_n\}))$

38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \min(PL(\{x_n\}))$

39. סדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל L אם ורק אם $PL(\{x_n\}) = \{L\}$

40. התכנסות של טור תלויה רק בזנב הטור

41. אם טור מתכנס אז סדרת האיברים $\{x_n\}$ מתכנסת ו: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

42. אם $|q| < 1$ הטור שאיבריו $x_n = q^{n-1}$ מתכנס ו: $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \frac{1}{1-q}$

43. הטור שאיבריו $x_n = \frac{1}{n}$ לא מתכנס

44. הטור שאיבריו $x_n = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$, $\alpha \in R$ מתכנס ו $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \frac{1}{\alpha+1}$

45. הטור שאיבריו $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס ו $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \log 2$

46. טור לייבניץ:

1. מתכנס

2. טור שאיברו האחרון זוגי מתכנס מלמעלה לסכום הטור וטור שאיברו האחרון אי-זוגי

מתכנס מלמטה לסכום הטור

3. מרחק השגיאה בין כל סכום חלקי לסכום המלא קטן מהאיבר הראשון שלא הוכנס לסכום החלקי

47. טור מתכנס אם ורק אם :

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall m \geq n \geq N_1 : |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| < \varepsilon$$

48. אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס

49. טור שכל איבריו חיוביים מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה מלמעלה

50. מבחן ההשוואה: יהיו $\{x_n\}, \{y_n\}$ סדרות כך ש $\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 0 < x_n \leq y_n$ אזי אם הטור שאיבריו מסדרה $\{y_n\}$ מתכנס אז הטור שאיבריו מהסדרה $\{x_n\}$ מתכנס

אם הטור שאיבריו מסדרה $\{x_n\}$ מתבדר אז הטור שאיבריו מהסדרה $\{y_n\}$ מתבדר

51. אם הסדרות $\{x_n\}, \{y_n\}$ חיוביות ומקיימות:

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} < \infty$$

אזי הטורים $\sum_{i=1}^{\infty} x_i, \sum_{i=1}^{\infty} y_i$ מתכנסים ומתבדרים ביחד (לרוב קיים הגבול ואז פשוט צריך לבדוק שהוא חיובי וסופי)

52. מבחן השורש: נניח $x_n > 0$ ו $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \alpha$ אז מתקיים:

1. אם $\alpha < 1$ אז הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתכנס

2. אם $\alpha > 1$ אז הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתבדר

53. מבחן המנה: נניח $x_n > 0$ ו $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha$ אז מתקיים:

1. אם $\alpha < 1$ אז הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתכנס

2. אם $\alpha > 1$ אז הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתבדר

54. מבחן העיבוי של קושי: נניח $x_n > 0$ ו $\{x_n\}$ סדרה לא עולה אזי הטורים $\sum_{i=1}^{\infty} x_i, \sum_{i=1}^{\infty} 2^i a_{2^i}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד

55. הטור $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ מתכנס אם ורק אם $s > 1$

56. כל טור שהוא סידור מחדש של טור מתכנס בהחלט מתכנס לאותו סכום

57. אם טור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתכנס בתנאי אז לכל $-\infty \leq A \leq B \leq +\infty$ קיים סידור מחדש $\{y_n\}$ של הטור כך ש: $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$ $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = A, \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = B$

58. לכל טור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתכנס בתנאי לכל $A \in \mathbb{R}$ קיים סידור מחדש של $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ שמתכנס ל-A

59. אם הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתכנס בתנאי אזי הטורים $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^-, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^+$ מתבדרים

60. אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ והפונקציה g חסומה בסביבה מנוקבת של a אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

61. הגבול של פונקציה $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים אם ורק אם:
אם $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0. |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$
 $\forall x', x'' \in E \wedge 0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$
62. אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ אז:
 $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = A \pm B$.1
 $\lim_{x \rightarrow a} (f * g)(x) = A * B$.2
 $\lim_{x \rightarrow a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{A}{B}, B \neq 0$ אם.1
63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
64. $\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}. \sin x < x < \tan x$
65. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\cos \frac{t}{2} * \cos \frac{t}{2^2} * \cos \frac{t}{2^3} \dots * \cos \frac{t}{2^n}\} = \frac{\sin t}{t}$
66. תהי f פונקציה $f: (a, b) \rightarrow R$ שלא יורדת אז הגבולות:
 $\lim_{x \downarrow b} f(x) = \inf_{(a, b)} f, \lim_{x \uparrow a} f(x) = \sup_{(a, b)} f$ קיימים
67. $\lim_{Q \ni r \rightarrow t} a^r = a^t, t \in Q$
68. $\forall a > 1, p < \infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$
69. $\forall \alpha > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$
70. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
71. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$
72. נניח $f: E \rightarrow R$ רציפה ב a אזי מתקיים:
1. קיימת סביבה $U(a)$ כך ש $U(a)$ חסומה ב $E \cap U(a)$
2. אם $f(a) \neq 0$ קיימת סביבה $U(a)$ שבה מתקיים
 $\forall x \in E \cap U(a). \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(a)$
3. אם $g: E \rightarrow R$ רציפה ב a אזי הפונקציות $f + g, f * g$ רציפות ב a ואם $g(x) \neq 0$
בסביבה של a אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה
4. אם $g: R \rightarrow R$ רציפה ב $f(a)$ אז $(g \circ f)$ רציפה ב a
73. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\lambda}{x})^x = e^\lambda$
74. תהי $f \in C([a, b])$ ומתקיים $f(a) * f(b) < 0$ אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש
 $f(c) = 0$
75. תהי $f \in C([a, b])$ ומתקיים $A < B, A \neq B$ אז לכל $A < C < B$
או לחילופין $B < C < A$ קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש $f(c) = C$
76. לכל פולינום מדרגה איזוגית קיימת נקודה בה הוא מתאפס

77. אם $f \in C(a, b)$ אז תמונתה $f(a, b)$ היא קטע (יכול להיות גם אינסופי או סינגלטון)

78. משפט ווייטראס: תהי $f \in C([a, b])$ אזי f חסומה ב $[a, b]$ ומקבלת את המקסימום ואת המינימום שלה

79. תהי $f \in C([a, b])$ אזי התמונה $f[a, b]$ היא קטע סגור $[\min_{[a,b]}, \max_{[a,b]}]$

80. משפט קנטור: אם $f \in C[a, b]$ אז f רציפה במידה שווה ב $[a, b]$

81. תהי $f : X \rightarrow R$ פונקציה מונוטונית ממש ו Y הוא הטווח של f אז קיימת הפונקציה $f^{-1} : Y \rightarrow X$ שהיא גם מונוטונית ממש. בנוסף: אם f עולה ממש אז f^{-1} עולה ממש ואם f יורדת ממש אז f^{-1} יורדת ממש

82. תהי $f \in C[a, b]$ פונקציה שקיימת לה פונקציה הופכית אז f מונוטונית ממש

83. תהי $f : [a, b] \rightarrow X$ פונקציה מונוטונית אז f רציפה ב $[a, b]$ אם ורק אם התמונה $f[a, b]$ היא קטע סגור שקצותיו $f(a)$ ו $f(b)$

84. תהי $f \in C[a, b]$ פונקציה מונוטונית חזקה אז הפונקציה ההופכית f^{-1} רציפה ומונוטונית חזקה

85. נגזרות יהיו u, v גזירות:

$$f = \text{const}, f' = 0.1$$

$$f = (u(x))^a, f' = a * (u'(x)) * (u(x))^{a-1}.2$$

$$f = \sin(u(x)), f' = (u'(x)) \cos(u(x)).3$$

$$f = \cos(u(x)), f' = -(u'(x)) \sin(u(x)).4$$

$$f = a^{u(x)}, f' = (u'(x)) * a^{u(x)} * \log a.5$$

$$f = \log(u(x)), f' = \frac{(u'(x))}{(u(x))}.6$$

$$f = \arcsin(u(x)), f' = \frac{(u'(x))}{\sqrt{1-(u(x))^2}}.7$$

$$f = \arccos(u(x)), f' = -\frac{(u'(x))}{\sqrt{1-(u(x))^2}}.8$$

$$f = \arctan(u(x)), f' = \frac{(u'(x))}{1+(u(x))^2}.9$$

$$f = \text{arccot}(u(x)), f' = -\frac{(u'(x))}{1+(u(x))^2}.01$$

$$f = (u(x))(v(x)), f' = (u'(x)) * (v(x)) + (u(x)) * (v'(x)).11$$

$$f = \frac{(u(x))}{(v(x))}, f' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.21$$

86. יהיו $f, g : (a, b) \rightarrow R$ גזירות ב $x \in (a, b)$ אז:

$$f + g \text{ גזירה ב } x$$

$$f * g \text{ גזירה ב } x$$

$$\text{אם } g(x) \neq 0 \text{ אז } \frac{f}{g} \text{ גזירה ב } x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

87. תהי $f : (a, b) \rightarrow R$ רציפה מונוטונית ממש וגזירה ב $x \in (a, b)$ ו $f'(x) \neq 0$ אז הפונקציה ההופכית f^{-1} גזירה ב $f(x)$ ו $y = f(x)$ ו $\frac{1}{f'(x)}$

88. תהי $y = f(x)$ גזירה ב x_0 ותהי $z = g(y)$ גזירה ב $y_0 = f(x_0)$ אז ההרכבה $g \circ f$ גזירה ב x_0 ומתקיים $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) * f'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$

89. תהי $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ונקודה x_0 בה f גזירה אזי קירוב לינארי של f ב- x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0), x \rightarrow x_0$$
90. אינטרפולציה של לגרנז': יהיו $n + 1$ נקודות $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ אזי קיים פולינום יחיד $P(x)$ שמקיים $\deg P \leq n$ ועובר בכל הנקודות. משוואות הפולינום היא:
נגדיר $Q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ מדרגה n שמקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_j} \frac{Q(x)}{(x - x_j)Q'(x_j)} = \lim_{x \rightarrow x_j} \frac{Q(x) - Q(x_j)}{(x - x_j)Q'(x_j)} = 1$$

אז הפולינום המבוקש הוא: $P(x) := \sum_{k=0}^n \frac{y_k Q(x)}{(x - x_k)Q'(x_k)}$ שעובר בכל הנקודות
91. $\forall p < \infty \lim_{x \rightarrow 0} x^{-p} e^{-1/x^2} = 0$
92. כלל לייבניץ: יהיו u, v גזירות n פעמים אז : $(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} u^{(n-m)} v^{(m)}$
93. כל פונקציה גזירה היא גם רציפה
94. תהי f בעלת נגזרת סופית ב- x_0 אם $f'(x_0) > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$\forall x_0 < x < x_0 + \delta. f(x) > f(x_0)$$

$$\forall x_0 - \delta < x < x_0. f(x) < f(x_0)$$

אם $f'(x_0) < 0$ אז קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$\forall x_0 < x < x_0 + \delta. f(x) < f(x_0)$$

$$\forall x_0 - \delta < x < x_0. f(x) > f(x_0)$$
95. משפט פרמה: תהי f רציפה בסביבה של x_0 וגזירה ב- x_0 ויש לה נקודת אקסטremum
 $f'(x_0) = 0$ אז x_0
96. משפט רול: תהי $f \in C[a, b]$ גזירה ב (a, b) ומתקיים $f(a) = f(b)$
אז $\exists c \in (a, b). f'(c) = 0$
97. משפט לגרנז': תהי $f \in C[a, b]$ וגזירה ב (a, b) אז

$$\exists c \in (a, b). f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$
98. תהי f גזירה ב (a, b) אז אם $f' > 0$ f עולה ממש ואם $f' < 0$ f יורדת ממש
99. תהי f גזירה ב (a, b) אז אם $f' \geq 0$ f לא יורדת ואם $f' \leq 0$ f לא עולה
100. תהי f גזירה ב (a, b) אז אם $f' = 0$ $f = \text{const}$
101. תהי f גזירה ב (a, b) n פעמים ו $f^{(n)} = 0$ אז f היא פולינום ו $\deg f \leq n - 1$
102. תהי f גזירה ב (a, b) ומתקיים $f' = f$ אז f מהצורה $f(x) = Ce^x$
103. משפט דרבו: תהי f גזירה ב $[a, b]$ אז f' מקבלת כל ערך בין $f'(a)$ ל $f'(b)$
104. משפט קושי: יהיו $f, g \in C[a, b]$ גזירות ב (a, b) אז:

$$\exists c \in (a, b). f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$
105. לופיטל: יהיו $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ויהיו f, g פונקציות גזירות ב (a, b) ו $g' \neq 0$
ב (a, b) ונניח ש:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L (-\infty \leq L \leq +\infty).$$

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0.2$$

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = +\infty.2$$

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = -\infty.2$$

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L: \text{אם מתקיים 1 ואחת הגרסאות של 2 אז:}$$

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad 106$$

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, x > -1, x \neq 0 \quad 107$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n \right) = \gamma \approx 0.5772 \quad 108$$

$$x > 0: \text{אי שוויון ברנולי מוכלל:} \quad 109$$

$$x^\alpha - \alpha x < 1 - \alpha, 0 < \alpha < 1.1$$

$$x^\alpha - \alpha x \geq 1 - \alpha, \alpha < 0, \alpha > 1.2$$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{אם } a, b > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1 \quad \text{יאנג:} \quad 110$$

$$\forall j. x_j, y_j \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1 \quad \text{אם מתקיים} \quad 111$$

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n y_j^q \right)^{1/q}$$

$$p = q = 2 \quad \text{קושי שוורץ: מקרה פרטי של הולדר כ} \quad 112$$

$$\forall j. x_j, y_j > 0, p \geq 1 \quad \text{מינקובסקי: אם מתקיים} \quad 113$$

$$\left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n y_j^p \right)^{1/p}$$

$$(a, b) \rightarrow R: f \text{ קמורה בקטע הפתוח } (a, b) \text{ אז } f \text{ רציפה בו} \quad 114$$

$$m_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{אם } f \text{ קמורה אז הפונקציה עולה גם לא וגם ל} \quad 115$$

$$\forall x, y \in I, x < y. f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \quad \text{אם } f: I \rightarrow R \text{ קמורה בו אז} \quad 116$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad \text{אם } x_1, x_2, \dots, x_n \in I \text{ ויהיו בו קמורה } f \text{ תהי} \quad 117$$

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) \quad \text{אז}$$

$$x_0 \text{ הנגזרות ב} \quad \text{תהי } g \text{ פונקציה שיש לה } n \text{ המקיימת} \quad 118$$

$$g(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0 \quad \text{אז } g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

$$x_0 \text{ משפט פיאנו: תהי } f \text{ פונקציה שיש לה } n \text{ נגזרות ב} \quad 119$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

$$f \text{ פונקציה השווה לטור טיילור שלה אזי טור טיילור זה הוא יחיד} \quad 120$$

$$f \in C^n[x_0, x] \text{ והנגזרת ה} n+1 \text{ קיימת ב} (x_0, x) \text{ ותהי } \varphi \in C[x_0, x] \text{ גזירה ב} \quad 121$$

$$(x_0, x) \text{ ונגזרתה שונה מ} 0 \text{ בתחום זה אז}$$

$$\exists c \in (x_0, x). R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)n!} f^{(n+1)}(c)(x - c)^n$$

$$\exists c \in (x_0, x) R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad \text{שארית לגרנז':} \quad 122$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c \in I} |f^{(n+1)}(c)| \quad \text{החסם:}$$

123. שארית קושי: $R_n(X) = \frac{(x-c)^n(x-x_0)}{n!} f^{(n+1)}(c)$
124. נניח ש $f \in C^\infty(I)$ וקיים קבוע C חיובי כך ש $\sup_{j \geq 0} \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| \leq C$ אז f שווה לטור טיילור שלה
125. $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$
126. $\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$
127. $\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$
128. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$
129. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$
130. $\forall |x| < 1, x = 1. \log(x+1) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j}$
131. $(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} x^j$
132. $\forall |x| \leq 1. \arctan x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$
133. זהויות טריגונומטריות:
 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.1$
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.2$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.3$
134. המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום $P \in C[z]$ מדרגה n סכום ריבויי האפסים שווה n .
באופן שקול: $\forall P \in C[z] P = c * (z - a_1)^{m_1} * \dots * (z - a_v)^{m_v}, c \in C, \sum_{i=1}^v m_i = n$
135. תהי R פונקציה רציונאלית עם מקדמים ב C אז ניתן להציג את R כסכום השברים החלקיים שלה לכל הקטבים + פולינום והצגה זו היא יחידה
136. המקדם A_k בשבר החלקי של R עם קוטב a שמכנה שלו הוא $(z - a)^k$ שווה ל $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k R(z)$
137. יהיו $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A, \sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$ שני טורים מתכנסים בהחלט, אזי מכפלתם מוגדרת $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$ AB
138. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
139. $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$
140. לכל z קיימת הצגה $z = re^{i\varphi}, r = |z|, \varphi = \arg(z)$
141. $e^{i\pi} = -1$
142. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
143. $e^{z+w} = e^z * e^w, e^{z+2\pi i} = e^z, (e^z)' = e^z$