**נורמות:**

קוראים ל- נורמה אם מתקיים:

1.

*2.*

*3.*

***א"ש קושי-שוורץ:***

***נורמות נוספות ב-:***

***משפט היינה-בורל:***

*קומפקט לכל כיסוי פתוח של יש תת כיסוי סופי.*

***משפט ויירשטראוס:***

*נניח רציפה, עבור קומפקט, אזי ל- יש מקסימום ומינימום ב-. בפרט, חסומה ב-.*

***משפט קנטור:***

*נניח רציפה, קומפקט, אזי רציפה במ"ש.*

*-תמונה רציפה של קומפקט – היא קומפקט.*

*- רציפה אמ"מ כל תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.*

***הומאומורפיזם:***

, , . נקראת הומאומורפיזם אם היא חח"ע ועל, רציפות.

-הומאומורפיזם הוא יחס שקילות.

**מסילות:**

מסילה היא העתקה רציפה, כאשר הוא קטע. אם , ל- קוראים נקודת ההתחלה ול- קוראים נקודת הסיום.

**קשירות מסילתית:**

קבוצה היא קשירה מסילתית אם לכל קיימת מסילה עם .

-אם הומאומורפים, ו- קשיר מסילתית, אז גם קשיר מסילתית.

**משפט ערך הביניים:**

נניח קשירה מסילתית, רציפה, אז קשירה מסילתית. בפרט, אם מקבלת את הערכים ו-, אז היא מקבלת את כל הערכים ביניהם.

-קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית נקראת תחום.

-אם תחום, , אז קיים קו פוליגונלי שמחבר בין ל-.

**משפט פיאנו:**

קיימת העתקה רציפה ועל .

- פתוחה, רציפה רציפה, לכל עקום רציף .

- נקראת אפינית אם , עבור העתקה לינארית ו-, כולן רציפות.

**נורמת אופרטור:** . מסמנים

*- הוא קבוע ליפשיץ של :*

*-אם סימטרית:*

***נורמת הילברט-שמידט:***

*-מתקיים:*

*-יהי מרחב לינארית, , ו- נורמות על . אזי קיים כך ש- לכל .*

*-כל במרחב סוף מימדי היא פונקצית ליפשיץ.*

***דיפרנציאל:***

*נניח , פתוחה, . נאמר ש- גזירה ב- אם קיימת לינארית כך ש:*

, כאשר

.

להעתקה הלינארית קוראים הדיפרנציאל של בנקודה , ומסמנים: .

-אם קיימת – היא יחידה.

-אם גזירה ב-, היא גם רציפה שם.

אם , כאשר , אז גזירה ב- אמ"מ לכל , גזירה ב-.

-מסמנים את הנגזרת הכיוונית של , ביחס ל- ב:

(אם הגבול קיים)

-אם גזירה, קיימות כל הנגזרות הכיווניות, ובפרט החלקיות.

-אם קיימות בסביבה של ורציפות ב- אזי דיפרנציאבילית ב-.

-אם לכל , אזי קבועה.

-אם גזירות ב-, אז:

(עבור פונקציות סקלריות)

**כלל השרשרת:**

נניח , אזי:

**משפט ערך הביניים של לגרנז':**

, דיפ' ב-, , אז קיים כך ש:

*-אם מוכלת בקו גובה של f, אז*

*-תחום נקרא קמור אם*

*-נניח גזירה, , אזי לכל ,*

*-הגרדיאנט הוא הכיוון בו הנגזרת הכיוונית של מקבלת מינימום/מקסימום.*

*-הגרדיאנט מאונך לקווי גובה.*

*-נניח פתוח וקמור, גזירה, , אזי לכל :*

*.𝑥− לכל ר, נך לקווי גובה.רת הכיוונית של*

*-נניח , קיימות ב-, ו- קיימת בסביבה של ורציפה ב- אזי .*

*-אם כל הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, אז סדר הגזירה לא משנה.*

***משפט טיילור:*** *נניח , :*

*שארית פאנו:*

*שארית לגרנז': נניח : וקיימת כך ש:*

***דיפאומורפיזם:***

*, הומאומורפיזם. נקראת דיפאומורפיזם אם גזירות.*

***משפט הפונקציה ההפוכה:***

*נניח , , . תהי , כך ש- מטריצה הפיכה. אז קיים כדור פתוח סביב כך ש:*

*1) פתוחה, ו- הומאומורפיזם.*

2) הפונקציה היא .

3)

- פתוחה, חלקה . נאמר שהיא רגולרית אם

**משפט ההעתקה הפתוחה:**

נניח פתוחה, רגולרית ו-. אזי העתקה פתוחה – כלומר פתוחה פתוחה.

-עבור מטריצה הפיכה :

**משפט הפונקציה הסתומה:**

נניח פתוחה, חלקה , , וגם:

א)

ב) המטריצה הפיכה (בסימון )

אזי קיימות קבוצות פתוחות ופונקציה חלקה כך ש:

א)

ב)

**כופלי לגרנז':**

נניח פתוחה, חלקות .

. נניח היא נק' קיצון מקומית של תחת האילוצים . נניח ש- בת"ל. אזי קיימים , כך ש:

-תהי לבנה, חסומה, ו- חלוקות של , אז .

**קריטריון דרבו לאינטג' רימן:**

נניח לבנה, חסומה, אזי אינטגרבילית אמ"מ

**משפט לבג:**

תהי לבנה, חסומה, אזי אינטגרבילית אמ"מ קבוצת נקודות אי הרציפות של היא זניחה.

-תהי . אומרים ש- זניחה אם לכל קיימות לבנים כך ש:

1)

2)

-איחוד בן מניה של קבוצות זניחות – הוא קבוצה זניחה.

-קבוצת קנטור היא זניחה (מעצמה ).

-נניח קבוצה זניחה, פונקציה -ליפשיץ, אזי זניחה.

-תמונת עקומה חלקה ב- – זניחה.

-נניח לבנה סגורה, רציפה, אזי הגרף של הוא קבוצה זניחה ב-.

- זניחה אינטגרבילית רימן

-אף קבוצה פתוחה אינה זניחה.

-אם זניחה וקומפקטית, אז יש מספר סופי של לבנים פתוחות כך ש:

א)

ב)

-נניח , . לכל נגדיר את התנודה של :

-עבור , נגדיר:

- רציפה ב-.

-קבוצת נקודות אי הרציפות של :

לא רציפה ב-

כאשר

-אומרים ש- קבוצת ז'ורדן אם חסומה ו- זניחה. במקרה זה נסמן עבור איזושהי לבנה שמכילה את .

-קבוצה נקראת צפופה ב- אם .

-המשלים של קבוצה זניחה הוא קבוצה צפופה ב-.

-אם אינטג', ו- פרט ל- בקבוצה זניחה, אז .

-אם קב' ז'ורדן, אזי קב' ז'ורדן ו-

-נניח קב' ז'ורדן, . אומרית ש- אינטג' על אם קיימת לבנה שמכילה את כך ש- אינטג' ב- ואז:

-מסמנים ב- את כל הקבוצות הזניחות ב-

**הלמה של סארד:**

תהי פתוחה, . נגדיר , אזי קבוצה זניחה.

**משפט פוביני:**

נניח , לבנים. אינטג'. אזי:

**עקרון קוואליארי:**

נניח תיבה, I קטע חסום: , זורדן נגדיר ז'ורדן לכל y ב-I אזי

-נפח כדור ב-: , כאשר , . אי זוגי: , זוגי:

-הזזה וסיבוב של קב' ז'ורדן ב- היא עדיין קב' ז'ורדן עם אותו הנפח.

-אם ז'ורדן, ו- לינארית הפיכה, אזי:

**משפט החלפת המשתנים:**

נניח פתוחה, העתקה , דיפאומורפיזם על התמונה, ונניח ש- קב' ז'ורדן עם . אזי לכל אינטג' על ,

**משפט ההתכנסות הנשלטת:**

נניח , עם קב' נק' אי רציפות זניחה. נניח ש- במ"ש מקומית. נניח ש- עם מז'ורנטה: , אזי '(𝑢𝑏𝑙𝑒𝑅 רציפות זניחה.

**נפח גוף סיבוב:**

עבור גוף דו מימדי הנמצא במישור נגדיר את הגוף: , אזי

-יש צפיפות מסה בתחום במישור *, אז המסה הכוללת:*

-קואורדינטות מרכז המסה הן: ,

**משפט פפוס:**

הנפח של גוף סיבוב (סביב ציר ), הינו השטח של כפול היקף המעגל המתקבל מסיבוב מרכז המסה סביב ציר :

*-אינטגרלים לא אמיתיים להשוואה:*

*,*

**:**

***יריעות***

1)גרף של פונקציה: קבוצה תקרא יריעה חלקה -מימדית אם לכל , קיימת סביבה של , סביבה ופונקציה חלקה כך ש:

2)הצגה סתומה: עבור קבוצה פתוחה ופונקציה חלקה , , נגדיר . נקודה תקרא רגולרית אם . אם כל הנקודות רגולריות, תקרא יריעה חלקה -מימדית.

3)הצגה פרמטרית: יריעה חלקה -מימדית אם לכל יש סביבה , קבוצה פתוחה , ו- רגולרית חח"ע ועל, . (, , תקרא רגולרית ב- אם לכל )

-מכפלה וקטורית (ב-): , , *,*

*-אם*  היא גרף של פונק' , , אזי:

- היא פתוחה ב- אמ"מ קיימת פתוחה כך ש-.

-קבוצה נקראת סגורה ב- אם פתוחה ב-. לחילופין, אם לכל סדרת נקודות ב- שמתכנסות לגבול ב-, הגבול הוא ב-.

-נניח ו- אז

.

-

-נניח  *קב' ז'ורדן. , אזי*

***אינטגרציה על יריעות:***-מטריצת גרם:

*-מפה תקרא נוחה אם אפשר להרחיב את לסביבה של כך שזו עדיין רגולרית, חח"ע וחלקה לתוך היריעה המתאימה.  
- זניחה אם התמונה ההפוכה שלה תחת כל מפה זניחה.  
-קבוצה ז'ורדן אם השפה שלה זניחה ב-.  
-עבור מפה נוחה , ז'ורדן, נגדיר:.-אפשר להציג קבוצת ז'ורדן כאיחוד זר של קבוצות ז'ורדן הנתונות כל אחת על ידי מפה יחידה, והאינט' על הקבוצה הוא סכום האינט'.***מרחב משיק:**

נניח יריעה -ממדית חלקה, . המרחב המשיק:

חישוב מרחב משיק:

1) בהצגה גרפית:

2) בהצגה סתומה:

3) בהצגה פרמטרית:  *(מקבלים span)*

**גזירות:**

נניח , ו- פונק', . אומרים ש- גזירה ב- אם קיימת העתקה לינארית כך שלכל עקומה עם ו- גזירה ב-0,

,

מסמנים .

-אם חלקה ב-, אזי .

-נניח יריעה מממד . וקטור יחידה נקרא נורמל ל- ב- אם . יש שניים כאלו, ומסמנים *.*

*-אם בסביבת , היא , אז:*

*-נניח וקטורים בת"ל. לוקטור שמקיים:*

, קוראים המכפלה הוקטורית של ומסומן .

**נוסחת ה-coarea:**

תחום ז'ורדן המכוסה ע"י – משפחת משטחים -ממדיים, הנתונים ע"י: , כך שכל נקודה , נמצאת בדיוק על משטח אחד מ-. בנוסף, נניח לכל . אזי:

**פונקצית גאמא:**

***חלוקת יחידה:***

*נניח ש- כיסוי פתוח של . חלוקת יחידה שמתאימה לכיסוי היא אוסף של פונקציות חלקות , , כך ש:*

*1)לכל ,*

*2)לכל , יש סביבה פתוחה כך ש:*

*בפרט, בכל נק' רק מספר סופי של שונים מ-0.*

*3) – זהו סכום סופי מקומית.*

*-לכל סיכוי פתוח של יש חלוקת יחידה.*

***שדה וקטורי:***

*נניח תחום. שדה וקטורי ב- הוא פונק' . אומרים ש- הוא אם הן* .

-נניח שדה וקטורי ב-. מסמנים:

-דוגמאות לתכונות הדיברגנץ:

1) אם ב- :

2) אם העתקה אורתוגונלית, אז:

א)

ב)

3)עבור שדה וקטורי ו- פונקציה סקלרית :

א)

ב)

**נורמל חיצוני**:

תהי קב' פתוחה וקשירה, ונניח היא יריעה חלקה -ממדית. תהי . נקרא לנורמל נורמל חיצוני אם קיים כך ש:

-אם פתוחה, קשירה וחסומה, כך ש- יריעה חלקה -ממדית, אז קיים ויחיד נורמל חיצוני.

**שטף:**

שדה וקטורי. השטף דרך משטח , בו ניתן לקבוע נורמל חיצוני באופן רציף:

**משפט הדיברגנץ:**

נניח פתוחה, שדה וקטורי , ו- קב' ז'ורדן כך ש-. קשירה, פתוחה וחסומה, כך ש- היא יריעה חלקה -ממדית. אז: כאשר הוא הנורמל החיצוני.

-פונקציה חלקה נקראת הרמונית אם

**עקרון הערך הממוצע לפונקציות הרמוניות:** ()

נניח הרמונית הסביבה של , אזי:

**אינטגרציה בחלקים:**

נניח , על תחום חסום ו"טוב", . אזי:

מסקנה: ( משוואות, אינטגרל וקטורי)

**זהויות גרין:**

1)

2)

3)

בסימונים:

**עקרון המקסימום:**

לפונקציה הרמונית ב-, אם עבור ,

, אז קבועה.

**תבניות דיפרנציאליות לינאריות:**

תבנית דיפרנציאלית לינארית היא כאשר העתקה לינארית.

-לשדה וקטורי מתאימה התבנית

אם אז התבנית המתאימה ל- היא

-אומרים שתבנית אם היא מהצורה ו-:

-תנאים להיות דיפרנציאל של פונקציה:

1) סגירות

2) לכל מסילה חלקה , האינטגרל תלוי רק בנק' ההתחלה והסיום של .

-תהי תבנית דיפ' לינארית, חלקה , בקב' פתוחה , ונניח ש- עקומה רציפה וחלקה למקוטעין. אזי מגדירים עבור , :

-נניח , עקומה חלקה, רגולרית וחח"ע. נסמן . תהי תבנית חלקה ב-, אזי , כאשר , לכל הוא וקטור יחידה המשיק ל- באוריינטציה של .

**משפט גרין:**

נניח , פתוחה וחסומה, ז'ורדן, ששפתה יריעה חלקה 1-ממדית, , ונניח ש- היא תבנית דיפ' חלקה ב-. נסמן עבור חלקות .

נניח שהשפה היא איחוד זר של התמונות של העקומות , והכיוון של הוא כך ש"התחום משמאלנו", אזי:

-נניח פרופורציונית ל-. אזי הרדיוס-וקטור מכסה שטחים שווים בזמנים שווים.

-שטח מצולע ששפות עקום סגור ופשוט, בהינתן הקדקודים:

-שדה וקטורי חלק ב- נקרא רדיאלי אם הוא מהצורה

. אז התבנית הדיפ' שמתאימה לו – סגורה.

-תהי קב' פתוחה וקשירה מסילתית, ו- תבנית דיפ' לינארית ב- חלקה . אזי התנאים הבאים שקולים:

1) קיימת חלקה עם .

2) האינטגרל של על עקומה תלוי רק בנק' ההתחלה והסיום של .

3) לכל עקומה סגורה ,

(כל העקומות גזירות ברציפות למקוטעין)

-תבנית נקראת מדויקת אם היא דיפ' של פונקציה.

-תבנית מדויקת תבנית סגורה.

-אם תבנית מדויקת ו- השדה הוקטורי המתאים ל-, אז אומרים ש- שדה משמר.

**חישוב שטחים:**

אם תחום חסום עם שפה חלקה למקוטעין, בכיוון החיובי ביחס ל-, אזי:

**סוגי קואורדינטות**

קואורדינטות קוטביות / פולריות (2 מימדים):



קואורדינטות ספריות / כדוריות (3 מימדים, או יותר) :

 - היא הזווית בין ציר Z לקרן שמחברת את הנקודה עם הראשית.

 - הזווית בין החלק החיובי של ציר x והיטל הקרן על מישור xy.

 - היטל הקרן על מישור xy.

קואורדינטות גליליות (3 מימדים) :



r - הוא המרחק בין ההיטל של נק' על מישור xY בין הראשית.

- היא הזווית בין r לחלק החיובי של ציר x.

- עבור אליפסות ואליפסואידים ניתן להשתמש בקואורדינטות דומות כאשר יש צורך להתאים את הרדיוס לפרמטרים של האליפסה, היעקוביאן מוכפל בפרמטרים של האליפסה.

**פרמטריזציות:**

טורוס:

טורוס המתקבל מסיבוב המעגל במישור (x,z) עם מרכז בנקודה (a,0,0) ורדיוס 0<b<a סביב ציר z: (ניתן גם להחליף את b ב- r)

סימפלקס:

– נפח של סימפלקס n מימדי הוא -

-פרמטריזציה של סימפלקס כאשר (הטלה):

**נורמלים**

1. עבור משטח הנתון בצורה גרפית:
2. עבור משטח הנתון בהצגה סתומה:



1. עבור משטח הנתון בצורת פרמטרית :  - מכפלה וקטורית של וקטורי בסיס המרחב המשיק.

**נוסחת נסיגה לנפח של כדור:**

הנוסחה נכונה גם לסימפלקס

**זהות אויילר+ הומוגניות:**

F הומוגנית ודיפרנציאבילית מדרגהK :

**זהויות טריגונומטריות:**



**אינטגרלים מיידים:**

