

נורמות:

קוראים ל-|| נרמה אם מתקיים:

1. ‖‖ = 0 ⇔ x = 0, ‖x‖ ≥ 0, ‖x‖ ∈ V, ∀x

2. ‖‖ α‖ = |α| ‖x‖, ∀λ ∈ ℝ, x ∈ V

3. ‖‖ |x| + ‖y‖ ≥ ‖x + y‖, x, y ∈ V

אש-קושי-שורץ:

‖‖ (x, y) ≤ ‖x‖ ‖y‖

נורמות נוספות ב-ℝ^n:

‖‖ p (x) = (∑_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}

‖‖ p (x) = lim_{p→∞} ‖x‖_p = max_{1≤i≤n} |x_i|

משפט הינה-בורד:

משפט ‖‖ K קומפקט ⇔ לכל כיסוי פתוח של K יש תת כיסוי סופי.

משפט ויירטשטראוס:

ניח ‖‖ K רציפה, f: K → ℝ עבור ‖‖ K קומפקט, אזי f-ל יש מקסימום ומינימום ב-K. בפרט, f חסומה ב-K.

משפט קנטור:

ניח ‖‖ K: K → ℝ רציפה, ‖‖ K קומפקט, אזי f רציפה במ"ש. תמונה רציפה של קומפקט – היא קומפקט.

‖‖ B → A: f: A → ℝ רציפה אמ"ל כל תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.

הומאומורפיזם:

‖‖ V → U: f, U ∈ ℝ^n, V ∈ ℝ^m. f נקראת הומאומורפיזם אם היא

חח"ע ועל, f^{-1}, f רציפות

-הומאומורפיזם הוא יחס שקילות.

מסילות:

מסילה היא העתקה רציפה ‖‖ ℝ → I: γ, כאשר ‖‖ I הוא קטע. אם ‖‖ I = [a, b] ‖‖ γ(a) < γ(b) קוראים נקודות ההתחלה ול-‖‖ γ(b) קוראים נקודת הסיום.

קשריות מסילית:

קבוצה ‖‖ ℝ^n היא קשירה מסיליתית אם לכל ‖‖ x, y קיימת מסילה ‖‖ γ: γ(a) = x, γ(b) = y עם ‖‖ γ: [a, b] → U קשירה מסיליתית. ‖‖ U, V הומאומורפיס, U-ו קשיר מסיליתית, אז גם V קשיר מסיליתית.

משפט ערר הביניים:

ניח ‖‖ U קשירה מסיליתית, f: U → ℝ רציפה, אז ‖‖ f(U) קשירה מסיליתית. בפרט, אם מקבלת את הערכים s ו-t, אז היא מקבלת את כל הערכים ביניהם.

קבוצה פתוחה וקשירה מסיליתית נקראת תחום.

אם ‖‖ U תחום, ‖‖ x, y ∈ U אז קיים קו פוליגוני שמחבר בין x ל-y.

משפט פיאנו:

קיימת העתקה רציפה ועל ‖‖ [0,1] → [0,1]^2.

‖‖ U פתוחה, ‖‖ f: U → ℝ^n רציפה ⇔ γ ∘ f רציפה, לכל קעום רציף ‖‖ γ: [a, b] → U.

‖‖ ℝ^n → ℝ^n: f נקראת אפינית אם ‖‖ b + L(x) = f(x), עבור העתקה ליניארית ל-‖‖ U ו-‖‖ b, נזר רציפות.

נורמת אופרטור:

מסמנים ‖‖ A: ℝ^n → ℝ^n

‖‖ A = max_{|x|=1} |Ax|

‖‖ A_{op} = ‖A‖ הוא קבוע ליפשיץ של A:

ו-‖‖ |x - y| ≤ ‖A‖ |x - y|

אם ‖‖ A_{op} = max{|λ_i|: λ_i ע"ע של A}

נורמת הילברט-שמידט:

מתקיים: ‖‖ A_{HS} ≤ ‖A‖_{op}

יהי ‖‖ V מרחב ליניארית, dim(V) < ∞, ‖·‖_1, ‖·‖_2 נורמות על ‖‖ V.

אזי קיים ‖‖ c > 0 כך ש-‖‖ ‖x‖_1 ≤ ‖x‖_2 ≤ c‖x‖_1 לכל ‖‖ x ∈ V.

כל-‖‖ ‖x‖ במרחב סוף מימד היא פונקצית ליפשיץ.

‖‖ |x| ≤ ‖x‖, ∀x ∈ V

דיפרנציאל:

ניח ‖‖ f: U → ℝ^n, U ⊆ ℝ^n פתוחה, ‖‖ x_0 ∈ U. נאמר ש-f גזירה ב-‖‖ x_0 אם קיימת ‖‖ L: ℝ^n → ℝ^n ליניארית כך ש-

‖‖ L(h) + α(h) = f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h), ‖‖ α(h) = o(‖h‖), כאשר ‖‖ lim_{h→0} = 0.

לעיתקה ליניארית L קוראים הדיפרנציאל של f בנקודה ‖‖ x_0, ומוסמנים: ‖‖ D_{x_0} f = df(x_0).

אם L קיימת – היא יחידה.

אם ‖‖ f גזירה ב-‖‖ x_0, היא גם רציפה שם.

אם ‖‖ f = (f_i)_{i=1}^n, כאשר ‖‖ f_i: U → ℝ, אז גזירה ב-‖‖ x_0 אמ"ל לכל ‖‖ i, ‖‖ f_i גזירה ב-‖‖ x_0.

מסמנים את הנגזרת הכיוונית של f ביחס ל-‖‖ θ ∈ ℝ^n ב:

‖‖ ∂_θ f(x_0) = lim_{t→0} \frac{f(x_0+tθ)-f(x_0)}{t}

אם f גזירה, קיימות כל הנגזרות הכיווניות, ובפרט החלקיות.

אם ‖‖ ∂_1 f, ..., ∂_n f קיימות בסביבה של ‖‖ x_0 ורציפות ב-‖‖ x_0 אז f דיפרנציאלית ב-‖‖ x_0.

אם ‖‖ Df(x) = 0 לכל ‖‖ x ∈ U, אזי f קבועה.

אם ‖‖ f, g גזירות ב-‖‖ x_0, אז:

‖‖ D(αf + βg)(x_0) = αDf(x_0) + βDg(x_0)
‖‖ ∇(fγ(t_0)) ⊥ γ'(t_0) (עבור פונקציית סקלריות)
‖‖ ∇(fγ(t_0)) = ∇(fγ) = fγg + g∇f
‖‖ ∇(f(x), g(x)) = ∇(∑_{i=1}^n f_i g_i) = (∑_{i=1}^n ∂_i f_i g_i + f_i ∂_i g_i)

ניח ‖‖ U → ℝ^n: γ גזירה, ‖‖ M = sup_{t∈I} |γ(t)|, אזי לכל ‖‖ a, b ∈ I

‖‖ |b - a| ≤ M|b - a|

הגדריאנוט הוא הכיוון ם הנגזרת הכיוונית של f מקבלת מינימום/מקסימום.

הגדריאנוט מאורך לקווי גובה.

ניח ‖‖ U פתוח וקמר, f: U → ℝ^n גזירה, ‖‖ M = sup_{x∈U} ‖f'(x)‖_{op}, אזי לכל ‖‖ x, y ∈ U

‖‖ |f(x) - f(y)| ≤ M|b - a|

ניח ‖‖ f: U → ℝ^n ו-‖‖ ∂_i(f) קיימות ב-‖‖ U, אזי קיימת

בסביבה של ‖‖ x_0 ורציפה ב-‖‖ x_0 אזי ‖‖ ∂_i(∂_j f) = ∂_j(∂_i f).

אם כל הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, אז סדר הגזירה לא משנה.

משפט טיילור: נניח ‖‖ c^k(U) ‖‖ f, x_0 ∈ U:

שארית פאנו: ‖‖ f(x) = J_{x_0}^k(x) + o(|x - x_0|^k)

שארית לגרנד: נניח ‖‖ c^{k+1}(U) ‖‖ f, R: f(x) = J_{x_0}^k(x) + o(|x - x_0|^{k+1})

‖‖ θ ∈ (0,1) כך ש:

‖‖ R = \sum_{|a|=k+1} \frac{\partial^a f(\theta x_0 + (1-\theta)x)}{a!} (x - x_0)^a

דיפאומורפיזם:

ניח ‖‖ V ⊆ ℝ^n, U ⊆ ℝ^m הומאומורפיזם. f נקראת דיפאומורפיזם אם f^{-1}, f גזירות.

משפט הפונקציה ההפוכה:

ניח ‖‖ U ⊆ ℝ^n פתוחה, ‖‖ f: U → ℝ^n ‖‖ f ∈ c^1. תהי ‖‖ x_0 ∈ U כך ש-

‖‖ f'(x_0) מטריצה הפיכה. אז קיים כדור פתוח ‖‖ B ⊂ U סביב ‖‖ x_0 כך ש:

1) ‖‖ f(B) פתוחה, ו-‖‖ B → f(B) הומאומורפיזם.

2) הפונקציה ‖‖ f(B) → f^{-1}: f היא c^1.

3) ‖‖ (f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}

‖‖ ℝ^m פתוחה, ‖‖ f: U → ℝ^m חלקה c^1. נאמר שהיא רגולרית אם ‖‖ n, m ∈ ℕ: rank(f'(x)) = min

משפט ההעתקה הפתוחה:

ניח ‖‖ U ⊆ ℝ^n פתוחה, ‖‖ U → ℝ^m רגולרית ו-n ו-m. אזי f העתקה פתוחה – כלומר ‖‖ V ⊆ f(U) פתוחה ⇔ ‖‖ V ⊆ f(U).

עבור מטריצה הפיכה ‖‖ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}

‖‖ A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}

משפט הפונקציה הסתומה:

ניח ‖‖ ℝ^{m+m} פתוחה, ‖‖ U → ℝ^m פתוחה, ‖‖ f: U → ℝ^m חלקה c^1, ‖‖ (a, b) ∈ U, ‖‖ a ∈ ℝ^m, b ∈ ℝ^m וגם:

א) ‖‖ a, b = 0

ב) המטריצה ‖‖ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) הפיכה (בסימן ‖‖ \frac{\partial f}{\partial x} \big|_{\frac{\partial f}{\partial y}})

אזי קיימות קבוצות פתוחות ‖‖ a ∈ A ⊆ ℝ^m, b ∈ B ⊆ ℝ^m ופונקציה ‖‖ A → B חלקה c^1 כך ש:

א) ‖‖ γ(x, y) = 0 ⇔ f(x, y) = 0

ב) ‖‖ g'(x) = -(\frac{\partial f}{\partial y})^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}

כופלי לגרנד:

ניח ‖‖ U ⊆ ℝ^n פתוחה, ‖‖ U → ℝ פתוחה, ‖‖ f, g_1, ..., g_k: U → ℝ חלקות c^1.

‖‖ M = \{x ∈ U: g_i(x) = 0\} ‖‖ g_i(x) = 0 ‖‖ M היא נק'

קצוץ ממוקדת של תחת האוליצים ‖‖ g_1, ..., g_k. נניח ש-

‖‖ ∇g_1(a), ..., ∇g_k(a) ב"ת"ל אזי קיימים ‖‖ λ_1, ..., λ_k כך ש:

‖‖ ∇f(a) = λ_1 ∇g_1(a) + ... + λ_k ∇g_k(a)

ותה-‖‖ Q ⊆ ℝ^n לבנה, ‖‖ Q → f חסומה, ‖‖ π_1, π_2 חלוקות של Q, אז

‖‖ Lf, (π_i) ≤ U(f, π_i)

ניח ‖‖ Q ⊆ ℝ^n לבנה, ‖‖ Q → f חסומה, אזי אינטגרבילית אמ"מ

‖‖ U(f, π) ≤ L(f, π) + ε ‖‖ ε > 0 ‖‖ 3π: π

משפט לבג:

תהי ‖‖ Q ⊆ ℝ^n לבנה, ‖‖ Q → f חסומה, אזי אינטגרבילית אמ"מ

קבוצת נקודותי של הרציפות של היא זניחה.

תהי-‖‖ A ⊆ ℝ^n אומרים ש-A זניחה אם לכל ‖‖ ε > 0 קיימות לבנים

‖‖ Q_1, Q_2, ... ∈ ℝ^n כך ש:

1) ‖‖ Q_i ⊆ U_{i=1}^∞ Q_i

2) ‖‖ ∑_{i=1}^∞ vol_n(Q_i) < ε

איחוד ב מניה של קבוצות זניחות – הוא קבוצה זניחה.

קבוצת קנטור היא זניחה (מעצמה).

ניח ‖‖ A ⊆ ℝ^n קבוצה זניחה, ‖‖ f: ℝ^n → ℝ^n פונקציה k-ליפשיץ, אזי ‖‖ f(A) זניחה.

תמונת קבוצה חלקה ב-‖‖ ℝ^2 – זניחה.

ניח-‖‖ Q ⊆ ℝ^n לבנה סגורה, ‖‖ f: Q → ℝ רציפה, אזי הגרף של f הוא קבוצה זניחה ב-‖‖ ℝ^{n+1}.

‖‖ graph(f) זניחה ⇔ ‖‖ f אינטגרבילית רימן

אף קבוצה פתוחה אינה זניחה.

אם ‖‖ A זניחה וקומפקטית, אז יש מספר סופי של לבנים

פתוחות ‖‖ Q_1, ..., Q_L כך ש:

‖‖ A ⊆ Q_1 ∪ ... ∪ Q_L

ב) ‖‖ ∑_{i=1}^L vol_n(Q_i) < ε

ניח-‖‖ f: Ω → ℝ, ‖‖ Ω ⊆ ℝ^n. לכל U נגדיר את התנגדה של f:

‖‖ osc_f(U) = sup_{U∩Ω} f - inf_{U∩Ω} f = sup_{U∩Ω} |f(x) - f(y)|

עבור ‖‖ x, δ ∈ ℝ: נגדיר-‖‖ osc_f(B(x, δ)) = lim_{δ→0} osc_f(x) = 0

‖‖ osc_f(x) = 0 רציפה ב-x.

קבוצת נקודותי של הרציפות של f:

‖‖ E_f = \{x ∈ ℝ^n: osc_f(x) > 0\} = \{x: osc_f(x) > 0\}

Ω:

כאשר ‖‖ E_f(R) = \{x: osc_f(x) ≥ R\}

אומרים ש-‖‖ A ⊆ ℝ^n קבוצת ז'ורדן אם חסומה ‖‖ δA זניחה.

במקרה זה נסמן ‖‖ J_δ(A) = vol_n(A) עבור איזושהי לבנה Q שמכילה את A.

קבוצה A נקראת צפופה ב-B אם ‖‖ A ⊆ B.

המשלים של קבוצה זניחה הוא קבוצה צפופה ב-‖‖ ℝ^n.

אם ‖‖ f, g אינטגו, ו-‖‖ f(x) = g(x) פרט ל-x בקבוצה זניחה, אז

‖‖ f = g

אם ‖‖ A, B ⊆ ℝ^n קב' ז'ורדן, אז ‖‖ A ∪ B, A ∩ B, A \ B קב' ז'ורדן ו-

‖‖ vol_n(A ∪ B) = vol_n(A) + vol_n(B) = vol_n(A ∩ B) + vol_n(A \ B)

ניח ‖‖ E ⊆ ℝ^n קב' ז'ורדן, ‖‖ f: E → ℝ אומרת ש-f אינטג' על E

