

רשימת משפטים לחדוו"א 2 עם סודין

רשימת משפטים מותרים לשימוש בבחינה של מיכאל סודין בחדוו"א 2

1 הגדרות

1. חלוקה: של $[a, b]$ היא אוסף של נקודות $x_0, \dots, x_n$
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \Pi = \{x_j\}_{j=0}^n$
2. חלוקה עם נקודות מסומנות: זוג סדור של חלוקה ונקודה בכל אחד מהקטעים
 $(\Pi, \{\xi_j\}). \xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$
3. גודל של חלוקה: מסומן $\lambda(\Pi) = \max_j \Delta x_j$
4. סכום רימן: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $S(f, \Pi, \{\xi_j\}) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j$
5. אינטגרל: $f.I := \int_a^b f(x) dx$ ב $[a, b]$ אם קיים $I \in \mathbb{R}$ כך ש:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall (\Pi, \{\xi_j\}). \lambda(\Pi) < \delta. |S(f, \Pi, \{\xi_j\}) - I| < \varepsilon$
6. תהי Π חלוקה של $[a, b]$ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נגדיר: $M_j := \sup_{[x_j, x_{j+1}]} f$,
 $m_j := \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f$
7. סכום דרבו תחתון: $\underline{\sum}(f, \Pi) := \sum_{j=0}^{n-1} m_j \Delta x_j$
סכום דרבו עליון: $\overline{\sum}(f, \Pi) := \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta x_j$
8. יהיו $\Pi = \{\xi_j\}, \Pi' = \{\xi'_j\}$ חלוקות של $[a, b]$ $\Pi' \prec \Pi$ (תקרא עדינה יותר Π') אם $\{\xi'_j\} \subset \{\xi_j\}$
9. תהי $f : I \rightarrow \mathbb{R} f : [\alpha, \beta]$ התנודה של f ב J תסומן ב $\omega_f(J)$
 $\omega_f(J) = \sup_J f - \inf_J f$ (כעת אפשר להחליף את הרישום במשפט דרבו במקום הפרש הסכומים לסכום התנודות)
10. פונקציה f תקרא רציפה למקוטעין אם מספר הנקודות שהיא לא רציפה בהן הוא בן מניה
11. $\int_a^b f = - \int_b^a f$
12. תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}[a, b]$ אז F תקרא קדומה של f אם F גזירה ב $[a, b]$
 $F' = f$
13. אינטגרל לא אמיתי: $f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ו $f \in \mathbb{R}[a, b]$ $\forall b < \omega$ אז
 $\int_a^\omega f := \lim_{b \uparrow \omega} \int_a^b f$ ובצורה שקולה בכיוון ההפוך
14. $\int_a^\omega |f|$ מתכנס בהחלט אם קיים $\int_a^\omega f$
15. פונקציית זטא: $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$
16. סדרה של פונקציות $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ תקרא מתכנסת נקודתית ל f אם
 $\forall x \in E, f_n(x) \rightarrow f(x)$
17. סדרה של פונקציות $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ תקרא מתכנסת במידה שווה ל f אם
 $\sup_E |f_n - f| \rightarrow 0$ יסומן $f_n \xrightarrow{u} f$

18. $\bar{I} = \inf_{\Pi} \sum (f, \Pi), \underline{I} = \sup_{\Pi} \sum (f, \Pi)$
19. $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ יהי S הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ אז S מתכנס נקודתית ל- f אם הטורים החלקיים $S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$ מתכנסים נקודתית ל- f
20. טור מתכנס במ"ש ל- f אם הטורים החלקיים שלו מתכנסים במ"ש ל- f
21. ניתן להרחיב את כל ההגדרות לסדרות מרוכבות ושם ההתכנסות שקולה להכנסות נפרדת של החלק הממשי ושל החלק המדומה
22. טור חזקות מרוכב הוא טור מהצורה $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k * z^k, z \in C$
23. תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים נגדיר $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$ ונאמר שקיים $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$ אם הסדרה מתכנסת למשהו שונה מ-0
24. תהי f פונקציה אזי $Per(f) = \{T \in \mathbb{R}, \forall x f(x+T) = f(x)\}$
25. קבוצת הפונקציות הרציפות בעלות מחזור 1 תסומן $C_{Per}(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = C(\mathbb{T})$
26. את קבוצת הפונקציות $f : \mathbb{R} \rightarrow C$ שהם אינטגרביליות רימן ובעלות מחזור 1 נסמן $\mathbb{R}$
27. $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f * \bar{g}$ אז $f, g \in \mathbb{R}$
28. $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$ אז $f \in \mathbb{R}$
29. $\langle f, g \rangle = 0$ אם $f, g \in \mathbb{R}, f \perp g$
30. $e_k(t) = e^{2\pi i k t}$
31. פולינום טריגונומטרי: $c_k \in C, P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k * e_k(t), \deg P \leq N$
32. $\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle$ מוגדר $f \in \mathbb{R}$
33. $S_N f = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) * e_k$
34. קונבולוציה: $(f \star g)(x) = \int_0^1 f(t)g(x-t)dt, f, g \in \mathbb{R}$
35. גרעין דירכלה: $D_N(t) = \sum_{|k| \leq N} e_k(t)$
36. סכום פייר: $\sigma_N f(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f(t)$
37. גרעין פייר: $F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t)$
38. גרעין טוב: $\varphi_N \in \mathbb{R}$ סדרת פונקציות כך ש $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ תקרא גרעין טוב אם:
 $\int_{-0.5}^{0.5} \varphi_N = 1.1$
 $\forall \delta > 0, \int_{\delta \leq |t| \leq 0.5} \varphi_N \rightarrow 0.2$
39. סכימת צ'ארו: טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ יתכנס במובן צ'ארו אם קיים הגבול $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{n=0}^N S_n$
כאשר $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$

40. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) | \forall i. x_i \in \mathbb{R}\}$
41. מטריקה במרחב $\mathbb{R}^n$ היא פונקציה $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת לכל $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:
1. $d(x, y) \geq 0$
 2. $d(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$
 3. $d(x, y) = d(y, x)$
 4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
42. המטריקה בה נשתמש היא $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
43. מחלקת מטריקות ב $\mathbb{R}^n$ היא $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ כאשר $1 \leq p \leq \infty$. עבור $p = \infty$ מתקיים $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$
44. $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x^{(m)}, x) = 0$ אם x סדרה תקרא מתכנסת ל x אם $(x^{(m)}) \subset \mathbb{R}^n$
45. כדור פתוח: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, a) < r\}$
46. כדור סגור: $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, a) \leq r\}$
47. ספירה: $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, a) = r\}$
48. קבוצות פתוחות: קבוצה $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא פתוחה אם לכל $x \in G$ קיים כדור פתוח $B(x, r) \subseteq G$
49. קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא סגורה אם $\mathbb{R}^n - C$ קבוצה פתוחה
50. סביבה של a מוגדרת להיות כל קבוצה פתוחה המכילה את δ, a סביבה של a היא כדור פתוח שמרכזו ב a ורדיוסו δ
51. $int(X) = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists B_x \subseteq X\}. X \subseteq \mathbb{R}^n$
52. $ext(X) = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists B_x \subseteq \mathbb{R}^n - X\}. X \subseteq \mathbb{R}^n$
53. $\partial(X) = \mathbb{R}^n - (int(X) \cup ext(X)). X \subseteq \mathbb{R}^n$
54. $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall \delta > 0 X \cap B(x, \delta) \neq \emptyset\}. X \subseteq \mathbb{R}^n$
55. $LP(X) = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists (x^{(m)}) \rightarrow x. x^{(m)} \in X\}. X \subseteq \mathbb{R}^n$
56. $diam(X) = \sup\{d(x, y) | x, y \in X\}. X \subseteq \mathbb{R}^n$
57. קבוצה $K \subset \mathbb{R}^n$ תקרא חסומה אם $diam(K) < \infty$
58. קבוצה $K \subset \mathbb{R}^n$ תקרא קבוצה קומפקטית אם לכל כיסוי של K על ידי קבוצות פתוחות קיים תת-כיסוי סופי
59. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ תקרא העתקה אם $m > 1$ ופונקציה אם $m = 1$
60. $B_a^* = B_a - \{a\}$
61. $Acc(X) = \{a \in \mathbb{R}^n | \forall B_a. B_a^* \cap X \neq \emptyset\}. X \subseteq \mathbb{R}^n$

62. אם $\lim_{x \rightarrow a, x \in X} f(x) = L$ אזי $X \subseteq \mathbb{R}^n, a \in \text{Acc}(X)$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0. x \in B(a, \delta) \cap X \rightarrow f(x) \in B(L, \varepsilon)$
63. $X \subseteq \mathbb{R}^n, f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי ניתן לפרק את f ל m פונקציות
 $f = (f_1, \dots, f_m). f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$
64. $\lim_{x \rightarrow a, x \in X} f(x) = f(a)$ אם $a \in X \cap \text{Acc}(X)$ ב $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
65. $\text{Isol}(X) = X - \text{Acc}(X). X \subseteq \mathbb{R}^n$
66. נורמה: $\|x\| = d(x, 0). x \in \mathbb{R}^n$ ומתקיים:
 $\|x\| > 0.1$
 $x = 0$ אם ורק אם $\|x\| = 0.2$
 $\|\lambda x\| = |\lambda| * \|x\|. \lambda \in \mathbb{R}.3$
 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.4$
67. $\|A\|_{op} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|. A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
68. אם A אופרטור לינארי אז $\text{Mat}(A)$ היא מטריצה מייצגת של A בהינתן בסיס
69. יהי V מרחב וקטורי ממשי אז $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ היא מכפלה פנימית המקיימת:
 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.1$
 $\lambda \in \mathbb{R}. \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.2$
 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.3$
 $x \neq 0 \rightarrow \langle x, x \rangle > 0.4$
70. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
71. זווית בין שני וקטורים x, y מוגדרת להיות $\theta = \arccos(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| * \|y\|})$
72. אם $\langle x, y \rangle = 0$ נסמן $x \perp y$
73. מרחב בעל מכפלה פנימית נקרא מרחב אוקלידי
74. מסילה: יהי I קטע כלשהו אזי נגדיר מסילה $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ואם $I = [a, b]$ אז $\gamma(a), \gamma(b)$ הן הקצוות
75. מסילה סגורה היא מסילה שקצותיה שווים
76. γ תקרא מסילה פשוטה אם $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ כלומר γ חד חד ערכית למעט אולי הקצוות
77. כיוון במסילה מוגדר לפי הכיוון בקטע ממנו היא מוגדרת
78. $\gamma : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ אז $\gamma_1 \sim \gamma_2$ אם קיימת העתקה $y : I_1 \rightarrow I_2$ שהיא על I_2 ומונוטונית עולה כך ש $\gamma_1 = \gamma_2 \circ y$
79. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא קשירה מסילתית אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ כך ש $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$
80. קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא תחום אם היא פתוחה וקשירה מסילתית

81. קו פוליגונילי: מסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך שקיימת חלוקה $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ כך שלכל $t_i < t < t_{i+1}$

$$\gamma(t) = \frac{\gamma(t_i)(t_{i+1}-t) + \gamma(t_{i+1})(t-t_i)}{t_{i+1}-t_i}$$

82. קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קשירה פוליגונית אם לכל $x, y \in X$ קיים קו פוליגונילי $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ כך ש $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$

83. $G \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה אזי $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ תקרא קבועה מקומית אם לכל $x \in G$ קיימת סביבה $U_x \subset G$ כך ש $f|_{U_x} = \text{const}$

84. סכום של סדרה $\{a_n\}$ יקרא מתכנס במובן אבל אם קיים הגבול $\lim_{z \rightarrow 1^-} a_n z_n$

85. תהי $G \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי f תקרא גזירה בנקודה x_0 אם קיימת העתקה לינארית $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ כך ש $f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + o(\|h\|)$ אם קיימת נגזרת בנקודה x_0 אז מסמנים $Df(x_0) = A$

86. נגזרת כיוונית ב x : אם $e \in S(0,1)$ אז הנגזרת של f ב x בכיוון e מוגדרת

$$(Df(x))e = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}$$

87. נגזרת חלקית: f גזירה ב x ו $\{e_j\}$ הבסיס הסטנדרטי ב $\mathbb{R}^n$ אז $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (Df_i(x))e_j$

88. מטריצת יעקובי $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ $Df(x)_{ij} =$

89. גרדיאנט: f גזירה ב x מלינארית קיים ξ_x כך ש $(Df(x))h = \langle \xi_x, h \rangle$ אז מגדירים $\xi = \text{grad}(f) = \nabla f$

90. $f \in C^k(G)$ אם כל הנגזרות החלקיות של f בכל נקודה ב G קיימות ורציפות עד סדר k

91. פיתוח טיילור: $f \in C^{m+1}(G)$ אז $f(a+h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(a) h_{j_1} \dots h_{j_k}) + R_{m+1}$

92. $0 < \xi < 1, R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j_1, \dots, j_{m+1}=1}^n \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}}(a + \xi h) h_{j_1} \dots h_{j_{m+1}}$

93. $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), P(h, f, a) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$

2 משפטים ומסקנות

1. תהי f פונקציה אינטגרבילית במובן R ב $[a, b]$ אזי f חסומה
2. כמה תכונות של סכומי דרבו:
 1. $\underline{\sum}(f, \Pi) \leq S(f, \Pi, \{\xi_j\}) \leq \overline{\sum}(f, \Pi)$
 2. $\underline{\sum}(f, \Pi) = \inf_{\{\xi_j\}} S(f, \Pi, \{\xi_j\})$
 3. $\overline{\sum}(f, \Pi) = \sup_{\{\xi_j\}} S(f, \Pi, \{\xi_j\})$
 4. $\forall \Pi_1 \Pi_2 \quad \underline{\sum}(f, \Pi_1) \leq \overline{\sum}(f, \Pi_2)$
3. יהיו $\Pi = \{\xi_j\}, \Pi' = \{\xi'_j\}$ חלוקות של $[a, b]$ אם Π' עדינה יותר מ Π אז:

$$\overline{\sum}(f, \Pi) \geq \overline{\sum}(f, \Pi'), \underline{\sum}(f, \Pi) \leq \underline{\sum}(f, \Pi')$$
4. משפט דרבו $f \in \mathbb{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0. \exists \delta. \forall \Pi. \lambda(\Pi) < \delta \implies \overline{\sum}(f, \Pi) - \underline{\sum}(f, \Pi) < \varepsilon$ (ניתן להחליף את כמת הלכל בבחירת החלוקה בכמת קייס-משפט דרבו החזק)
5. $C[a, b] \subset R[a, b]$ או במילים כל פונקציה רציפה היא אינטגרבילית
6. תהי f פונקציה מונוטונית וחסומה אז $f \in \mathbb{R}[a, b]$
7. תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין אזי $f \in \mathbb{R}[a, b]$
8. תכונות של אינטגרל רימן $(f, g \in \mathbb{R}[a, b])$
 1. $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$
 2. $f * g \in \mathbb{R}[a, b]$
 3. $|f| \in \mathbb{R}[a, b]$
9. $f \in \mathbb{R}[c, d], f \in \mathbb{R}[a, b], [c, d] \subset [a, b]$
10. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, f \in \mathbb{R}[a, b], a < c < b$
11. $\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0, f \in \mathbb{R}[a, b], a < c < b$
12. $\int_a^b f \geq 0, f \geq 0, f \in \mathbb{R}[a, b]$
13. $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2, f_1 \leq f_2, f_1, f_2 \in \mathbb{R}[a, b]$
14. $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a), m \leq f \leq M, f \in \mathbb{R}[a, b]$
15. $f \in C[a, b], M := \max_{a,b} f, m := \min_{a,b} f$ אז קיימת נקודה $\xi \in [a, b]$ כך ש

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$
16. $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|, f \in \mathbb{R}[a, b]$
17. $m * \int_a^b g \leq \int_a^b f * g \leq M \int_a^b g$ אז $f, g \in \mathbb{R}[a, b], g \geq 0, m \leq f \leq M$
18. $g \in \mathbb{R}[a, b], g \geq 0, f \in C[a, b]$ אז קיימת נקודה $\xi \in [a, b]$ כך ש

$$\int_a^b f * g = f(\xi) \int_a^b g$$

19. $|\int_a^b f * g| \leq \sqrt{\int_a^b f^2 * \int_a^b g^2}$ אז $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$
20. אם $F_1 - F_2 = \text{const}$ אז F_2 שתייהן קדומות של f
21. אם $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ אז f קדומה של F ו $f \in \mathbb{R}[a, b]$
22. אם $f \in \mathbb{R}[a, b]$ ו $F := \int_a^x f$ אז $F \in C[a, b]$ ואם f רציפה ב x אז F גזירה ב x ו $F'(x) = f(x)$
23. F, G ו $f, f \in \mathbb{R}[a, b]$ קדומות בהתאמה אז $\int_a^b F * g = F(b) * G(b) - F(a) * G(a) - \int_a^b f * G$
24. שארית אינטגרלית לטיילור: $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n(a, b, f)$. $f \in C^n[a, b]$
 $R_n(a, b, f) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1} dt$
25. $\int_a^b f = \int_a^\beta (f \circ \varphi) \varphi'$ אז $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi = C^1[\alpha, \beta], f \in C(\varphi[\alpha, \beta])$
26. $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, f \in \mathbb{R}[a, b], \varphi = C^1[\alpha, \beta], f \in C(\varphi[\alpha, \beta])$ מונוטונית
ממש אז $\int_a^b (f \circ \varphi) \varphi' \in \mathbb{R}[a, b]$ ו $(f \circ \varphi) \varphi' \in \mathbb{R}[a, b]$
27. $\int_0^\infty e^{-x} = 1$
28. $\int_0^1 x^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$
29. $\int_1^\infty e^{-x} = \frac{1}{e}$
30. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$
31. תכונות של אינטגרלים לא אמיתיים (f אינטגרלית במובן הלא אמיתי)
1. אם $f \in \mathbb{R}[a, \omega]$ אז האינטגרל במובן הלא אמיתי שווה לאינטגרל במובן רימן
2. אם F קדומה ל f אז $\int_a^\omega F(b) - F(a) = \lim_{b \uparrow \omega} F(b) - F(a)$
3. $\int_a^\omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\omega f + \beta \int_a^\omega g$
4. $\lim_{b \uparrow \omega} (f * g)(b)$ וקיים הגבול ל $f, g \in C^1[a, \omega]$ אז $\int_a^\omega f'g = \lim_{b \uparrow \omega} (f * g)(b) - f(a) * g(a) - \int_a^\omega f g'$
5. נניח שקיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^\omega f$ וש $\varphi : [\alpha, \tau) \rightarrow [a, \omega)$ ו φ גזירה ברציפות
ו $\varphi(\alpha) = a, \lim_{s \uparrow \tau} \varphi(s) = \omega$ אז קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_\alpha^\tau (f \circ \varphi) \varphi'$ ומתקיים $\int_\alpha^\tau (f \circ \varphi) \varphi' = \int_a^\omega f$
6. קריטריון קושי: $\forall b < \omega, f \in \mathbb{R}[a, b]$ אז $\int_a^\omega f$ קיים אם ורק אם $\forall \varepsilon > 0. \exists b < \omega. \forall b_1, b_2 \in [b, \omega) | \int_{b_1}^{b_2} f | < \varepsilon$
32. אם $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אז הוא קיים
33. נניח כי $f \in \mathbb{R}[a, b]$ ו $f \geq 0, \forall b < \omega$. נגדיר $F(b) := \int_a^b f$ אז $\int_a^\omega f$ קיים אם ורק אם F חסומה

34. $\int_a^\omega f$ איז קיים $\int_a^\omega g$ אם $0 \leq f \leq g$. $\forall b < \omega$. $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$
35. $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ לא עולה, אז $\int_1^\infty f$ ו $\sum_{n \geq 1} f(n)$ מתכנסים או מתבדרים ביחד
 ו $\sum_{n \geq 2} f(n) \leq \int_1^\infty f \leq \sum_{n \geq 1} f(n)$
36. $\forall n \geq 2$. $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} < n! < n^n e^{-n} e^{\frac{1}{12n}} \sqrt{2\pi n}$ $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$
37. $\pi \notin \mathbb{Q}$
38. $\lim_{s \downarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$
39. $\lim_{s \downarrow 1} (\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) = \gamma = \text{euler} - \text{mascheroni constant}$
40. אינטגרציה בחלקים יכולה לשפר את ההתכנסות של האינטגרל-להשלים!!!
41. קריטריון אבל-דירכלה: $f, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[a, \omega)$, $g \in C^1[a, \omega)$ מונוטונית ומתקיים אחד מהשניים
 1. (אבל) $\int_a^\omega f$ קיים וג' חסומה
 2. (דירכלה) הפונקציה $F(x) := \int_a^x f$ חסומה ו $\lim_{x \rightarrow \omega} g(x) = 0$
 אז $\int_a^\omega f * g$ מתכנס
42. הלמה של בונט: אם תנאי אבל מתקיים או תנאי דירכלה מתקיים אז
 $\forall b_1, b_2 \in [a, \omega)$. $\exists \xi \in [b_1, b_2]$. $\int_{b_1}^{b_2} f * g = g(b_1) \int_{b_1}^\xi f + g(b_2) \int_\xi^{b_2} f$
43. נוסחת וואליס: $\prod_{n=1}^\infty (\frac{2n}{2n-1} * \frac{2n}{2n+1}) = \frac{\pi}{2}$
44. קריטריון קושי להתכנסות במ"ש: תהי $\{f_n\}$ סדרה $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $f_n \vec{u} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N. \sup_E |f_n - f_m| < \varepsilon$
45. $f \in C(E)$ אז $f_n \in C(E)$, $f_n \vec{u} f$
46. משפט דיני: $f_n \in C[a, b]$ מתכנס מונוטונית נקודתית ל $f \in C[a, b]$ אז $f_n \vec{u} f$
47. $f_n \in \mathbb{R}[a, b]$ אז $f \in \mathbb{R}[a, b]$ וגם $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$
48. $f_n \in C^1[a, b]$ וקיימת נקודה c כך שהסדרה $\{f_n(c)\}$ מתכנסת, אז
 $f_n \vec{u} f$, $f \in C^1[a, b]$, $f' = g$
49. Π, Π' חלוקות $\Pi' = \Pi \cup \{p_1, \dots, p_k\}$
 $\overline{\sum}(f, \Pi') \leq \overline{\sum}(f, \Pi) \leq \overline{\sum}(f, \Pi') + k * \lambda(\Pi) \omega_f([a, b])$.1
 $\underline{\sum}(f, \Pi') \leq \underline{\sum}(f, \Pi) \leq \underline{\sum}(f, \Pi') - k * \lambda(\Pi) \omega_f([a, b])$.2
50. $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta. \forall \Pi. \lambda(\Pi) \geq \delta$
 $\overline{\sum}(f, \Pi) \geq \bar{I} \geq \overline{\sum}(f, \Pi) - \varepsilon$.1
 $\underline{\sum}(f, \Pi) \leq \bar{I} \leq \underline{\sum}(f, \Pi) + \varepsilon$.2
51. $f \in C[a, b]$ והטור $\sum_{n=1}^\infty f_n \vec{u} f$ אז $f_n \in C[a, b]$
52. $f_n \in C[a, b]$, $f_n \geq 0$ והטור $\sum_{n=1}^\infty f_n \rightarrow f$ אז $f \in C[a, b]$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ והטור $f_n : E \rightarrow C, \forall n |f_n| \leq M_n$: M -test
מתכנס במ"ש ובהחלט ב- E

54. $f_n : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$: *majorant convergence*

$$\forall b < \omega. f_n \in \mathbb{R}[a, b].1$$

$$\forall b < \omega. f_n \xrightarrow{u} f.2$$

$$\int_a^\omega g \text{ מתכנס } \exists g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}. \forall n \forall x \in [a, \omega). |f_n(x)| \geq g(x).3$$

$$\int_a^\omega f_n \rightarrow \int_a^\omega f \text{ אז}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.55$$

56. פונקציית ווירשטראס, רציפה בכל נקודה ולא גזירה באף נקודה:
 $a * b > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ש $b, 0 < a < 1. W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k * \pi x).$

57. תהי $f \in C[a, b]$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום P כך ש $\varepsilon > 0$ $\max_{[a,b]} |f - P| < \varepsilon$

58. למה: נניח שוטור חזקות S מתכנס בנקודה $z_0 \neq 0$ אז:

1. לכל z כך ש $|z| < |z_0|$ הטור מתכנס בהחלט

2. לכל $q < 1$ הטור מתכנס במידה שווה ב- $\{z : |z| \leq q * |z_0|\}$

59. קיים $R \in [0, \infty]$ כך ש לכל $R < |z|$ הטור מתכנס ולכל $|z| > R$ הטור מתבדר

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \text{ וערכו}$$

60. אם $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$ מתכנסת אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

61. אם $a_n > 0$ אז $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$ מתכנסת אם ורק אם $\sum_{k=0}^{\infty} \log a_k$ מתכנס

62. אם $a_n > 0$ אז $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$ מתכנסת אם ורק אם $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - 1)$ מתכנס

63. יהי $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k * z^k$ טור חזקות אזי קיים הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$ ושווה

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k * k * z^{k-1}$$

64. יהי $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k * x^k$ טור חזקות אזי $S \in C^\infty(-R, \mathbb{R})$ כאשר R רדיוס ההתכנסות

65. יהי $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k * x^k$ טור חזקות אזי $\int_0^x S(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{k} x^k$

66. יהיו $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k * x^k, S_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k * x^k$ טורי חזקות כך שלכל $\forall a_k = b_k$ אזי $S(x) = S_2(x) x \in (-R, \mathbb{R})$

67. לכל פונקציה f שהטור טיילור שלה מתכנס אליה, הוא יחיד

68. משפט אבל דירכלה: נניח $B_k : E \rightarrow C. B_k : E \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח שמתקיים אחד התנאים

1. $\sum a_k(t)$ מתכנס במידה שווה ב- E ו $\{B_k(t)\}$ מונוטונית וחסומה

2. הסכומים החלקיים של $a_k(t)$ חסומים ו $B_k(t)$ מוטונית שואפת לס לכל t

אז: $\sum a_k(t) B_k(t)$ מתכנס במידה שווה ב- E

69. סכימה בחלקים: אם $a_k = A_{k+1} - A_k, b_k = B_{k+1} - B_k$ אז

$$\sum_{k=n}^m a_k * B_k = A_{m+1} B_{m+1} - A_n * B_n - \sum_{k=n}^m A_k * b_k$$

70. תהי f פונקציה אזי $Per(f)$ סגור לסכום לקיחת נגדי וכפל בשלם
71. אם f לא פונקציה קבועה אזי $Per(f) = \{m * T.m \in \mathbb{Z}, T \geq 0\}$
72. $f \in \mathbb{R}, \forall a, b \int_a^{a+1} f = \int_b^{b+1} f$
73. אזי: $f, f_2, g, h \in \mathbb{R}, h \in C(\mathbb{R})$
 $h = 0$ אם ורק אם $\|h\| = 0$.1
 $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.2
 $\langle f + f_2, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$.3
 $c \in C. \langle c * f, g \rangle = c * \langle f, g \rangle$.4
74. $f \in \mathbb{R}, \|f\| = 0$ אז $f(x) = 0$ לכל x נקודת רציפות של f
75. $\|f + g\| \leq \|g\| + \|f\|$ $f, g \in \mathbb{R}$
76. משפט פיתגורס: $f, g \in \mathbb{R}, f \perp g$ אז $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$
77. אי שוויון קושי-שוורץ: $f, g \in \mathbb{R}$ $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| * \|g\|$ ויש שוויון אם ורק אם $c \in C. f = g * c$
78. $\|e_k\| = 1, \forall k \neq l. e_k \perp e_l$
79. $e_k(t) = \cos(2\pi kt) + i * \sin(2\pi kt)$
80. $P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k * e_k(t)$ פולינום טריגונומטרי $\langle P, e_m \rangle = c_m$ אם $|m| \leq N$ ו0 אחרת $\langle P, e_m \rangle$
81. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2. f \in \mathbb{R}$ אי שוויון בסל:
82. $\forall N. \langle f - S_N f, S_N f \rangle = 0. f \in \mathbb{R}$
83. הלמה של רימן לבג: $f \in \mathbb{R}$ $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$
84. הלמה של רימן לבג מקרה כללי: $f : [a, b] \rightarrow C$ $-\infty \leq a < b \leq \infty$ אינטגרבילית בהחלט ב $[a, b]$ אזי $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) * e^{ikx} dx = 0$
85. $\hat{f}_a(k) = e_k(-a) * \hat{f}(k)$ אז $f \in \mathbb{R}. f_a(t) = f(t + a)$
86. $f \in \mathbb{R}$ אזי אם f ממשית אז מקדמי פורייה שלה ממשיים ואם f זוגית אז מקדמי פורייה שלה זוגיים
87. אז: $f, g, h \in \mathbb{R}$
 $(f * g) = (g * f)$.1
 $(f * (c_1 g + c_2 h)) = c_1 (f * g) + c_2 (f * h)$.2
 $S \in P_{trig}, deg S \leq N. (f * S) \in P_{trig}, deg(f * S) \leq N$.3
אם בנוסף $f \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ אז $(f * g) \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$.4
אם בנוסף $g \in C^k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ אז $(f * g) \in C^k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$.5
 $(f * g) * h = f * (g * h)$.6
 $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k) * \hat{g}(k)$.7

$$f \star e_k = \widehat{f}(k) * e_k. f \in \mathbb{R} \quad .88$$

$$D_N(t) = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} \quad .89$$

$$|k| \leq N \text{ וס אחרת } \widehat{D_N}(k) = 1 \quad .90$$

$$\int_0^1 D_N(t) dt = 1 \quad .91$$

$$S_N f = f \star D_N. f \in \mathbb{R} \quad .92$$

$$\forall \delta > 0 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{0.5} (f(x-t) + f(x+t)) D_N(t) dt = 0 \text{ אז } f \in \mathbb{R} \quad .93$$

$$f = g \text{ (} x_0 - \delta, x_0 + \delta \text{) שבתחום } f, g \in \mathbb{R}, x_0 \in [-0.5, 0.5] \quad .94$$

$$S_N f(x_0), S_N g(x_0) \text{ מתכנסים ומתבדרים ביחד ואם מתכנסים אז לאותו ערך}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad .95$$

$$f \in \mathbb{R}, x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ אם } \quad .96$$

$$\exists M, \alpha, \delta \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). |f(t) - f(x_0)| \leq M|t - x_0|^\alpha$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = f(x_0) \text{ אז}$$

$$f \in \mathbb{R}, x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ אם } \quad .97$$

$$\exists M, \alpha, \delta \forall t \in (x_0 - \delta, x_0). |f(t) - f(x_0 - 0)| \leq M|t - x_0|^\alpha \wedge$$

$$\forall t \in (x_0, x_0 + \delta). |f(t) - f(x_0 + 0)| \leq M|t - x_0|^\alpha$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) \text{ אז}$$

$$\sigma_N f \vec{u} f. f \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \quad .98$$

$$m \leq N \text{ אחרת } \widehat{F_N}(m) = 1 - \frac{|m|}{N+1} \quad .99$$

$$F_N(t) = \sum_{|m| \leq N} \widehat{F_N}(m) e_m(t) \quad .100$$

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)t)}{\sin(\pi t)} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi(N+1)t)) \quad .101$$

$$.102 \text{ תכונות של גרעין פייר:}$$

$$F_N(t) \geq 0.1$$

$$\int_{-0.5}^{0.5} F_N = 1.2$$

$$\forall \delta > 0.0.5 \geq |t| \geq \delta. F_N(t) \leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{\delta^2} .3$$

$$F_N(0) = N + 1.4$$

$$f \star \varphi_N \vec{u} f. f \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \text{ אם } \varphi_N \text{ גרעין טוב אז עבור } \quad .103$$

$$\max_{[0,1]} |f - S| < \varepsilon \text{ ש } \forall \varepsilon > 0 \exists S \in P_{trig} \text{ אז } f \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \quad .104$$

$$\|f - S\| < \varepsilon \text{ ש } \forall \varepsilon > 0 \exists S \in P_{trig} \text{ אז } f \in \mathbb{R} \quad .105$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\| = 0 \text{ אז } f \in \mathbb{R} \quad .106$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2. f \in \mathbb{R} \text{ שוויון פרסיבל: } \quad .107$$

$$108. f(x) = 0 \text{ } \forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) = 0 \text{ אם } f \in \mathbb{R} \text{ של } x \text{ רציפות רציפות } f(x) = 0$$

$$109. S_N f \vec{u} f \text{ מתכנס } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \text{ אם } f \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$$

$$110. \widehat{f^{(k)}}(N) = (2\pi i N)^k \widehat{f}(N) \text{ רציפה למקוטעין } f \in C^{(k-1)}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$$

$$111. \max_{[0,1]} |f - S_N f| \leq \frac{o(1)}{N^{k-0.5}} \text{ רציפה למקוטעין } f \in C^{(k-1)}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$$

$$112. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$113. \cos(2\pi \varrho t) = \frac{\sin(\pi \varrho)}{\pi \varrho} + \frac{\varrho \sin(\pi \varrho)}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{\varrho^2 - n^2} \cos(2\pi n t), \varrho \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$114. \cos(\pi n) = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$115. \sin(\gamma \pi) = \gamma \pi \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\gamma^2}{n^2}), -1 < \gamma < 1$$

$$116. \text{ אם טור מתכנס אז הוא מתכנס במובן צ'זארו ולאחר גבול}$$

$$117. \text{ אם סכום מתכנס במובן צ'זארו אז } a_n = o(n)$$

$$118. \text{ אם סכום מתכנס במובן צ'זארו אז הוא מתכנס במובן אבל ולאחר סכום}$$

$$119. S_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{ כש } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^n = (1 - \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} S_n \gamma^n$$

$$120. \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i \text{ מתקיים } i \text{ לכל אם ורק אם } (x^{(m)}) \subset \mathbb{R}^n \text{ סדרה}$$

$$121. \text{ קריטריון קושי: סדרה } (x^{(m)}) \subset \mathbb{R}^n \text{ מתכנסת אם ורק אם } \forall \varepsilon \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall m, k > N_0, d(x^{(m)}, x^{(k)}) < \varepsilon$$

$$122. \text{ הקבוצות הפתוחות הן טופולוגיה על } \mathbb{R}^n \text{ כלומר מתקיים ש:}$$

$$1. \text{ לכל } \{G_\alpha\}_\alpha \text{ משפחה של קבוצות פתוחות לאו דווקא בת מניה מתקיים ש } \bigcup_\alpha G_\alpha \text{ קבוצה פתוחה}$$

$$2. \text{ לכל } \{G_\alpha\}_\alpha \text{ משפחה סופית של קבוצות פתוחות מתקיים ש } \bigcap_\alpha G_\alpha \text{ קבוצה פתוחה}$$

$$123. \text{ מתקיים:}$$

$$1. \text{ לכל } \{C_\alpha\}_\alpha \text{ משפחה של קבוצות סגורות לאו דווקא בת מניה מתקיים ש } \bigcap_\alpha C_\alpha \text{ קבוצה סגורה}$$

$$2. \text{ לכל } \{C_\alpha\}_\alpha \text{ משפחה סופית של קבוצות סגורות מתקיים ש } \bigcup_\alpha C_\alpha \text{ קבוצה סגורה}$$

$$124. \text{int}(\text{int}(X)) = \text{int}(X), \partial(\partial(X)) = \partial(X)$$

$$125. \overline{X} = \text{int}(X) \cup \partial(X)$$

$$126. \overline{X} = LP(X)$$

$$127. X = \overline{X} \text{ אם ורק אם } X \text{ קבוצה סגורה}$$

$$128. \text{diam}(B(a, r)) = \text{diam}(\overline{X}(a, r)) = \text{diam}(S(a, r)) = 2r$$

$$129. \text{ לכל סדרה חסומה ב-} \mathbb{R}^n \text{ קיימת תת סדרה מתכנסת}$$

130. תהי $K \subset \mathbb{R}^n$ אזי הטענות הבאות שקולות
 1.1 קבוצה קומפקטית
 2. סגורה וחסומה
 3. לכל סדרה $(x^{(m)}) \in K$ קיימת תת סדרה מתכנסת ל- $x \in K$ כלומר $LP(x^{(m)}) \subset K$
131. $\forall i. f_i(x) \rightarrow L_i$ אם ורק אם $f(x) \rightarrow L. X \subseteq \mathbb{R}^n : X \rightarrow \mathbb{R}^m$
132. $X \subseteq \mathbb{R}^n, f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי f רציפה אם ורק אם לכל i רציפה f_i
133. $X \subseteq \mathbb{R}^n, f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי f רציפה בכל הנקודות המבודדות של X
134. $X \subseteq \mathbb{R}^n, f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ אם f רציפה ב- a אז קיימת סביבה של U_a כך ש
 $\text{diam}(f(U_a \cap X)) < \infty$
135. $X \subseteq \mathbb{R}^n, f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ אם f רציפה ב- a ו- $f(a) > 0$ אז קיימת סביבה של U_a כך ש
 $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^p, f : X \rightarrow \mathbb{R}^m, g : Y \rightarrow X$ מתקיים $f|_{U_a \cap X} > 0$ אם f רציפה ב- a ו- g רציפה ב- b אז $g(b) = a$ ש $f \circ g$ רציפה ב- b
136. משפט קנטור: $K \rightarrow \mathbb{R}^n$ קומפקטית ו- $f \in C(K, \mathbb{R}^n)$ אז f רציפה במידה שווה ב- K
 כלומר $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in K \forall x \in B(a, \delta) \cap K$
137. משפט וויטראס: $K \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C(K, \mathbb{R}^n)$ אז f חסומה ב- K ואם $n = 1$ מקבלת את המקסימום והמינימום
138. $d(x + z, y + z) = d(x, y). \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$
139. לכל נורמה ב- $\mathbb{R}^n$ קיימים קבועים c, C כך שלכל x $c||x||_{\text{new}} \leq ||x|| \leq C||x||_{\text{new}}$
140. כל נורמה רציפה ב- $\mathbb{R}^n$
141. $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ כלומר כל העתקה לינארית היא רציפה
142. $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ על נורמה $|| \cdot ||_{op}$
143. $||A \circ B||_{op} \leq ||A||_{op} * ||B||_{op}$
144. $||A||_{op} \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2. A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \text{Mat}(A) = (a_{ij})$
145. אי שוויון קושי-שוורץ: $| \langle x, y \rangle | \leq ||x|| * ||y||$
146. יהי E_n מרחב אוקלידי מממד n ו- $L \in L(E_n, \mathbb{R})$ אז קיים וקטור $\xi_L \in E_n$ כך ש
 $\forall x. Lx = \langle x, \xi_L \rangle$
147. $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m, f : X \rightarrow Y$ קשירה מסילתית ו- $f(X)$ קשירה מסילתית
148. $X \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C(X, \mathbb{R})$ ו- X קשירה מסילתית ו- f $\inf_X f < 0 < \sup_X f$ אז קיימת $x \in X$ כך ש $f(x) = 0$

149. תהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה אזי הטענות הבאות שקולות
1. G קשירה מסילתית
 2. G קשירה פוליגונית
 3. אם $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ קבועה מקומית אז $f = \text{const}$
 4. אם $X \subset G$ פתוחה ו- $G - X$ קבוצה פתוחה אז $X = \emptyset$ או $X = G$
150. סכימת אבל מרחיבה את סכימת צ'ארו
151. נגזרת של פונקציה רבת משתנים אם קיימת היא יחידה
152. יהיו $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ אזי $f + g, c * f$ גזירות ב x_0 ומתקיים:

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0), D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$$
153. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ גזירה ב x_0 אם ורק אם לכל i גזירה ב x_0 f_i
154. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ גזירה ב x_0 ו $\|Df(x_0)\|_{op} \leq M$ אזי קיימת $\delta > 0$ כך ש

$$\forall h \in B(0, \delta). \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq M * \|h\|$$
155. אם פונקציה גזירה ב x_0 אז היא רציפה ב x_0
156. כלל השרשרת: $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m, g : U \rightarrow \mathbb{R}^p, U \subset \mathbb{R}^m$ ו $f(x) = y$ ו f גזירה ב x ו g גזירה ב y אז $\varphi = g \circ f$ גזירה ב x ו

$$D\varphi(x) = Dg(y)Df(x)$$
157. כל העתקה לינארית גזירה והנגזרת שלה היא עצמה
158. משפט פרמה: $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב x ו x הוא אקסטרמום מקומי אז $Df(x) = 0$
159. משפט הערך הממוצע: $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n, [a, b] \subset G$ גזירה בכל נקודה ב $[a, b]$ אז קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש $f(b) - f(a) = Df(c) * (b - a)$
160. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ו G קמורה ו f גזירה ב G ו $\|Df(x)\|_{op} \leq M$ לכל $x \in G$ אז

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$$
161. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ו G היא תחום ו f גזירה בכל G ו $Df(x) = 0$ לכל $x \in G$ אז f קבועה
162. משמעות הגרדיאנט: $e = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ אז אם $\langle \nabla f(x), e \rangle > 0$ אז $f < \nabla f(x), e \rangle$ עולה בכיוון e ואם $\langle \nabla f(x), e \rangle < 0$ אז f יורדת בכיוון e
163. אם x אקסטרמום מקומי אז $\nabla f(x) = 0$
164. אם f גזירה ב x אז קיימות הנגזרות הכיווניות ואז קיימות הנגזרות החלקיות אבל הכיוון ההפוך לא בהכרח (אף אחד מהמעברים)
165. אם f קיימות נגזרות חלקיות בסביבה של x והן רציפות בה אז f גזירה ב x
166. $f \in C^1(G)$ אז הגרדיאנט של f רציף כפונקציה של x אם ורק אם הדיפרנציאל של f רציף כפונקציה ב x
167. $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח שקיימת סביבה של x שבה $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ קיימות ו $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ קיימת ורציפה אז $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ קיימת ב x ושווה ל $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ב x
168. $f \in C^k(G)$ אז סדר הגזירה לא משנה (רק כמה פעמים גזרנו בכל משתנה)

$$\|R(a, h, f)\| \leq \frac{N_{m+1}(f)}{(m+1)!} (\sqrt{n}\|h\|)^{m+1}, N^{m+1}(f) = \sup_{x \in G} \max_{1 \leq j_1, \dots, j_{m+1}} \left| \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}} \right| \quad .169$$

$$.170 \quad \text{אם } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{N_{m+1}(f)}{(m+1)!} = 0 \text{ אז טור טיילור של } f \text{ מתכנס ל } f \text{ בהחלט ובמידה שווה בכל } G$$

$$.171 \quad \text{שארית לפי פיננו: } f \in C^m(G) \text{ אז } f(a+h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(a) h_{j_1} \dots h_{j_k} \right) + o(\|h\|^m)$$

- .172 משפט לגראנז': $f \in C^2(G), f : G \rightarrow \mathbb{R}$ אז:
1. אם $P(h, f, a)$ מוגדרת חיובית אז a נקודת אקסטרמום (חזקה) מקומית.
 2. אם $P(h, f, a)$ מוגדרת שלילית אז a נקודת מינימום (חזקה) מקומית.
 3. אחרת אם קיימים h, k כך ש $P(k, f, a) > 0, P(h, f, a) < 0$ אז a נקודת אוכף