טופולוגיה אלגברית - הרצאה 7

מסקנה מ CHP:

לכל כיסוי $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ p_* הינו מונומורפיזם. ויתר על כן $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ מורכבת מ $[\gamma]$ כך שהרמת γ המתחילה ב $\tilde{x}_0$ היא לולאה.
כאשר γ הומוטופית ל $X\to\{pt\}$ אותה נוכל להרים למסילה ב $\tilde{X}$, ולשאול מתי היא תהיה לולאה.

הוכחה: נניח $[\tilde{f}]\in \ker p_*$. אזי $0=p_*[\tilde{f}]=[\underbrace{p\circ\tilde{f}}_{f}]$. קיימת הומוטופיה $f\overset{h}{\sim}x_0$, וקיימת הרמה, לכן $\tilde{f}\overset{\tilde{h}}{\sim}\tilde{x}_0$ ולכן $[\tilde{f}]=0$. אם $[\gamma]\in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$, אז $[\gamma]=[p\circ\tilde{\gamma}]$, כלומר $p\circ\tilde{\gamma}\overset{h}{\sim}\gamma$. נרים את ההומוטופיה, $\tilde{\gamma}\sim\tilde{\gamma}'$. $\tilde{\gamma}$ לולאה ולכן $\tilde{\gamma}'$ לולאה.

מסקנה: $p:\tilde{X}\to X$ כיסוי. נניח $X,\tilde{X}$ קשירים מסילתית. אזי $|p^{-1}(x)|=const$ לכל $x\in X$, וקבוע זה הינו - $[\pi_1(X):p_*\pi_1(X)]$.

הערה:

- יהיו $x_0,x_1\in X$. נבנה $\varphi:p^{-1}(x_0)\to p^{-1}(x_1)$. תהא f מסילה מ x_0 ל x_1. לכל $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ נבנה הרמה של f המתחילה ב $\tilde{x}_0$ ומסתיימת ב $p^{-1}(x_1)$. נגדיר $\varphi(\tilde{x}_0)=\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(1)$. ל$\varphi$ יש פשוט העתקה הפכית ע"י $\bar{f}$.
- נבנה $\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0)$. ניקח $[f]$, ונק' $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$. נרים את f למסילה שמתחילה ב $\tilde{x}_0$. $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(1)$ גם ב $p^{-1}(x_0)$. זו העתקה על, כי ניתן לקחת מסילה בין $\tilde{x}_0$ לנק' ב $p^{-1}(x_0)$ ואחרי p נקבל לולאה. מקור. מקורות של הסיבים זה בדיוק כוסטים.

מסקנה:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X},\tilde{x}_0 \arrow[d, "p\text{ כיסוי}"] \\ Y,y_0 \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X,x_0 \end{tikzcd}$$

$p\circ\tilde{f}=f$.

Y קשיר מסילתית וקשיר מסילתית מקומית.
אז קיימת הרמה $\tilde{f}$ אם ורק אם:
$f_*\pi_1(Y,y_0)\subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$

הוכחה:

⇐: אם הרמה קיימת, $f_*\pi_1(Y,y_0)=p_*\overbrace{\tilde f_*\pi_1(Y,y_0)}^{\substack{\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)\ \text{תת חבורה} \\ \cup}}\subset p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)$.

⇒:

• בניית $\tilde f$: לכל $y\in Y$ ניקח מסילה g_y המקשרת בין y_0 ל-y. נרים אותה למסילה:

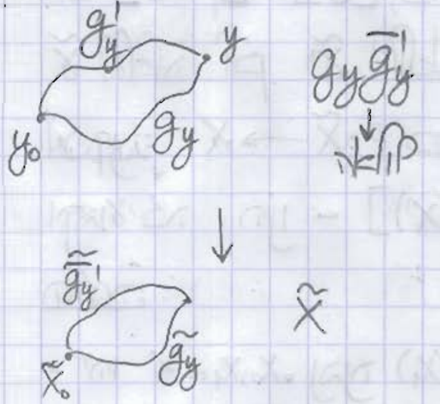
$\tilde g_y\to\tilde X$ כך ש $p\circ\tilde g_y=f\circ g_y$, $\tilde g_y(0)=\tilde x_0$

$$p:\tilde X\to X,\qquad Y\xleftarrow{g_y}[0,1],\qquad f:Y\to X$$

נגדיר $\tilde f(y)=\tilde g_y(1)$.

• קיבלנו $\tilde f$ בוודאי הרמה.

• $\tilde f$ מוגדרת היטב:



לפי התנאי, $[f\circ g_y\bar g_y']\in p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)$ ולכן לפי מה שאמרנו $f\circ g_y\bar g_y'$ מורמת ללולאה ב-$\tilde X$

זה בדיוק אומר ש... $\tilde g_y(1)=\tilde g_y'(1)$.

• $\tilde f$ רציפה:

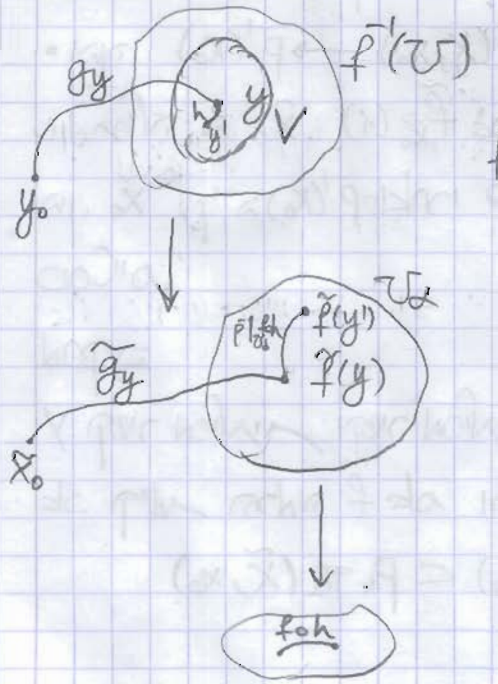
$f(y)\in X$, ניקח סביבה הגונה של $f(y)$ אז

קשירה מסילתית.

$p^{-1}(U)=\bigcup_\alpha U_\alpha$, $U\cong U_\alpha$.

כך ש $\tilde f(y)\in U_\alpha$, בנוסף, $y\in V\subset f^{-1}(U)\subset Y$. נראה ש $V\subset\tilde f^{-1}(U_\alpha)$ ומכאן נובע רציפות.

?: לכל $y'\in V$, $\tilde f(y')\in U_\alpha$. h מקשרת בין y ל-y'. נפעיל את f ונרים את $f\circ g_y$; $f\circ h\subset U$ גם נרים. מהציור ברורה רציפות.



<u>מסקנה</u>: הרמה כנ"ל יחידה, גם אם Y ק"מ מקומית. נניח $\tilde f_1,\tilde f_2$ הרמות.
אם $\tilde x_0=\tilde f_1(y_0)=\tilde f_2(y_0)$ אז $\tilde f_1=\tilde f_2$.

<u>הוכחה</u>: נכתוב $Y=\{\tilde f_1=\tilde f_2\}\cup\{\tilde f_1\neq\tilde f_2\}$. הקבוצה הימנית בוודאי פתוחה. אבל גם
הקבוצה השמאלית פתוחה - אם $\tilde f_1(y)=\tilde f_2(y)$. $f(y)\in \underset{\text{מאורית}}{U}\subset X$. $p^{-1}(U)=\cup U_\alpha$.
אז $\tilde f_1(y)=\tilde f_2(y)\in U_\alpha$. אם נמצא ק V (נקבל
$p\tilde f_1=p\tilde f_2=f|_{\tilde f^{-1}(V)}$, בסביבה זו נהפוך את p, כנדרש.
לכן מקשירות Y סיימנו.

<u>משפט:</u> Borsuk- Ulam Coen
לכל $f:S^n\to\mathbb{R}^n$ קיימת $x\in\mathbb{R}^n$ כך ש $f(x)=f(-x)$.

<u>הוכחה</u>: <u>$n=1$</u>:
$f:S^1\to\mathbb{R}$ נגדיר $g(x)=f(x)-f(-x)$. אם ב x $g>0$ אז ב $-x$ $g<0$ ולכן ממשפט ערך הביניים יש שורש.

$n=2$: $f:S^2\to\mathbb{R}^2$. נגדיר (נניח שאין נק' כזו). נתבונן ב $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$,
אז $h:S^2\to S^1$. הדיאגרמה פגרה.
נקבל דיאגרמה

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{h} & S^1 \\ \text{כיסוי דו יריעתי}\ p_2\downarrow & & \downarrow p_1\ \text{כיסוי דו יריעתי} \\ \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{\tilde h} & S^1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow 2 \\ \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} \end{array}$$

אנו נמצאים בתנאים הקודמים ולכן ניתן להרים ל $\tilde h':\mathbb{RP}^2\to S^1$.
$p_1\circ\tilde h'=\tilde h$, $\tilde h'\circ p_2=h$ כי $\tilde h\circ p_2=p_1\circ\tilde h'\circ p_2=p_1\circ h$. ויחידות הרמה.
אז $h(x)=\tilde h'\circ p_2(x)=\tilde h'\circ p_2(-x)=h(-x)$ וזו סתירה.

מיון של כיסויים

הגדרה: X נקרא פשוט קשר חצי מקומית אם לכל $x\in X$ קיימת סביבה U כך ש $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ היא העתקת ה-0.

משפט: יהי X קשיר מסילתית, קשיר מסילתית מקומית ופשוט קשר חצי מקומית. אזי לכל תת חבורה $H<\pi_1(X,x_0)$ קיים כיסוי $p:\tilde X_H,\tilde x_0\to X,x_0$ כך ש $p_*\pi_1(\tilde X_H,\tilde x_0)\cong H$.

הוכחה: נניח $H=\{e\}$.

• בניית $\tilde X$: נגדיר את $\tilde X$ קבוצתית: $\tilde X=\left\{[\gamma]\ \middle|\ \gamma:[0,1]\to X,\ \gamma_0=x_0\right\}$
ו- $p:\tilde X\to X$ ע"י $[\gamma]\mapsto\gamma(1)$.

• טופולוגיית $\tilde X$. נקח בסיס של סביבות "רגולריות" (יהיו רגולריות) "קשירות מסילתית" $U<X$ עם $i_*=0$. נגדיר $U_{[\gamma]}<\tilde X$ אם $\gamma(1)\in U$: $U_{[\gamma]}=\{[\gamma\cdot\eta],\ \eta:[0,1]\to U\}$.
נראה כי $\{U_{[\gamma]}\}$ בסיס לטופולוגיה. ברור שהם מכסים את $\tilde X$. נבדוק שאם $[\varepsilon]\in U_{[\gamma]}\cap V_{[\delta]}$ אז $[\varepsilon]\in W_{[\varepsilon]}$. אז $U\cap V$ לא ריק. $[\varepsilon]=[\gamma\eta]=[\delta\zeta]$.
$\varepsilon(1)\in U\cap V$ לכן יש $\varepsilon(1)\in W\subset U\cap V$. אז $W_{[\varepsilon]}\subset U_{[\gamma]}\cap V_{[\delta]}$ (קל מציור):

קבוצה פתוחה בסיסית

בגלל $[\varepsilon]\in W_{[\varepsilon]}$, $W_{[\varepsilon]}\ni[\varepsilon w]=[\gamma(\underbrace{\eta(w)}_{\in U_{[\gamma]}})]=[\delta(\underbrace{\zeta w}_{\in V_{[\delta]}})]$

• $\tilde X$ מרחב מכסה: נעבוד ב U, $p:U_{[\gamma]}\to U$ כל פעם הומיאומורפיזם, כי הוא על מקומית ב U. הוא חח"ע מפני ש $in_*:\pi_1(U)\to 0$ ויש התאמה בין מסלולים קצה של $[\gamma]\in\tilde X$ ושל $\gamma(1)$! p מעביר ביניהם, לכן p רציף. (אם $\gamma'(1)\in U$ $U_{[\gamma]}=U_{[\gamma']}$ או שהם זרים).
! $p^{-1}(U)=\dot\bigcup U_{[\gamma]}$ לכן U הן סביבות רגולריות.

• $\pi_1(\tilde X)=0$: מספיק להראות $p_*\pi_1(\tilde X)=0$, כלומר אם $[\gamma]\in\pi_1(X)$ מתרוממת ללולאה אז $\gamma\overset{h}{\sim}x_0$. אז תהא $[\gamma]\in\pi_1(X)$, נרים אותה: $g:I\to\tilde X$, $g(s)=[\gamma(st)]$.
כי אכן הרמה. מתי g לולאה? כש $g(0)=g(1)$, כלומר $[\gamma(t)]=[\gamma(0)]$, כלומר $\gamma\overset{h}{\sim}x_0$.

• אם $H\neq\{e\}$, נגדיר $\tilde X_H=\{[\gamma],\gamma(0)=x_0\}/\sim$ כאשר $[\gamma]\sim[\gamma']$ אם $\gamma(1)=\gamma'(1)$
ו $[\gamma\bar\gamma']\in H$! הבניה זהה.

הגדרה: אם יש הומאומורפיזם Φ כך שהתרשים

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_2 \arrow[r, "\Phi", "\sim"'] \arrow[dr, "p_2"'] & \tilde{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ & X \end{tikzcd}$$

מתחלף, $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ הם כיסויים איזומורפיים.

משפט: X קשיר מסילתית וק"מ מקומית, $(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$, $(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ כיסויים. הומאומורפיזם Φ קיים $\Leftrightarrow$ $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1)=p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2)$.

הוכחה:

$\Leftarrow$: ברור.

$\Rightarrow$: אם p_2 נרים ל Φ_2 ואת p_1 נרים ל Φ_1. נטען כי הן הפכיות, זה נובע בקיום מחזורי ההרמה.

הגדרה: X קשיר מסילתית, $p:\tilde{X}\to X$ נקרא כיסוי אוניברסלי אם $\tilde{X}$ קשיר מסילתית ופשוט קשר. הוא אוביקט תחילי.

אוטומורפיזמים של כיסויים ופעולות של חבורות

הגדרה: $p:\tilde{X}\to X$ כיסוי. הומ' $\varphi:\tilde{X}\to\tilde{X}$ נקרא אוטו' של $\tilde{X}$ אם התרשים

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$p_*\varphi_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)=p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$

כל האוטומורפיזמים יוצרים חבורה $Aut(p:\tilde{X}\to X)$.

למה: $X,\tilde{X}$ קשירים מסילתית. אזי כל $\varphi\in Aut(\tilde{X}\to X)$ מוגדר ע"י תמונתו בנק' בודדת.

משפט: X קשיר מסילתית, וק"מ מקומית. $p:\tilde{X}\to X$ כיסוי, $\tilde{X}$ ק"מ.

נסמן $H=p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$. אזי:

(1) $Aut(\tilde{X}\to X)$ פועלת ב $p^{-1}(x_0)$ באופן טרנזיטיבי אם ורק אם H נורמלית.

(2) $Aut(\tilde{X}\to X)\cong Norm(H)/H$.

מסקנה: אם $\tilde{X}$ אוניברסלי, אזי $Aut(\tilde{X}\to X)\cong\pi_1(X,x_0)$.

הוכחה:

(1) נשים לב שהחלפת נק' $\tilde{x}_0$ ב $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$ שקולה להצמדה של H:

$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)=[ph]\cdot H\cdot[ph]^{-1}$.

כאשר h מסילה המקשרת בין $\tilde{x}_0$ ל $\tilde{x}_1$.

מאידך, בהינתן $\varphi \in Aut(\tilde{X}\to X)$ עם $\varphi(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$, אז $p\circ\varphi=p$ ונקבל:

$$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)=p_*\varphi_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)=p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$$

אם נשווה זאת לשוויון הקודם נקבל את הנדרש.

(2) נגדיר $\varphi: Norm(H)\longrightarrow Aut(\tilde{X}\to X)$ g מוצג ע"י $[\gamma]$, נרים אותה $\gamma=p\circ h$ עם $h(0)=\tilde{x}_0$, $h(1)=\tilde{x}_1$ (לא תלוי בנציג γ לפי הלמה המונודרומיה) ונבנה אוטומורפיזם לפי CHP (מובטח ע"י $gHg^{-1}=H$). φ בוודאי הומומורפיזם, ו-φ על; בהינתן φ עם $\tilde{x}_0,\tilde{x}_1$ נקח מסילה h ביניהם ונגדיר $g=[ph]$, ראינו כי g כזה מנורמליזר ובחר שמקיים φ. קל לראות כי $Ker\varphi=H$, אם g מגרעין אז הוא מורם ללולאה ולכן הוא בH.