טופולוגיה אלגברית - הרצאה ב

חבורה יסודית

הגדרה:

מחב' H
↑

(1) (X,x_0) מרחב מנוקד. נגדיר $\pi_1(X,x_0) := \pi(S^1,X)$

(2) מסילה זו העתקה $f:I\longrightarrow X$, $f(0)=x_0$, $f(1)=x_1$. f נקראת לולאה אם $x_0=x_1$. הומוטופיית מסילות היא $f\overset{h}{\simeq} g$ rel$(0,1)$. $\pi_1(X,x_0)$ מוגדר כקבוצת מחלקות של לולאות עד כדי הומוטופיה עם התחלה ב x_0. (עם פעולת הרכבה)

טענה: שתי ההגדרות שקולות.

למה: $\pi_1(X,x_0)$ חבורה ביחס לפעולות:

$$[f]\cdot[g] := [f\cdot g] \qquad [f]^{-1} := [\bar f]$$

$$f\cdot g := \begin{cases} f(2t) & 0\leq t\leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases} \qquad \bar f(t) = f(1-t)$$

$e(t) := x_0$ → יחידה

כבר הוכחנו, כי מרחב הלולאות מרחב H.

דוגמא: לכל X כוויץ $\pi_1(X,x_0)=1$.

למה ב: העתקה $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ משרה הומ' $f_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$ ע"י $f_*[\alpha] := [f\circ\alpha]$. (בעצם פונקטור $Top_{pt}\longrightarrow Group$).

הוכחה: ברור.

תלות בנק' x_0:

X קשיר מסילתית, $x_0,x_1\in X$! $\beta:[0,1]\longrightarrow X$, $\beta(0)=x_0$, $\beta(1)=x_1$.

תהא $f:I\to(X,x_0)$ נגדיר לולאה - $\beta_*(f)$ ע"י $\beta\circ f\circ\bar\beta$. זו לולאה של (X,x_1)

למה: β_* מוגדר היטב והינו איזומורפיזם $\beta_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_1)$

הוכחה: אם $f\overset{h}{\simeq} g$ rel$(0,1)$ אזי $\beta f\bar\beta\overset{h}{\simeq}\beta g\bar\beta$ rel$(0,1)$ בודאי. כמו כן:

β_* הינו הומומורפיזם $\beta_*(fg) = [\beta fg\bar\beta] = [\beta f\underset{\underset{x_0}{\wr}}{\bar\beta\beta}g\bar\beta] = \beta_*[f]\cdot\beta_*[g]$

ו β_* כמובן ההעתקה ההפוכה, לכן β_* איזומ'.

נניח ש $\beta:[0,1]\to(X,x_0)$, אזי β_* הוא אוטומורפיזם הצמדה עם איבר $[\beta]$.

<u>תכונה יסודית שקילות הומוטופית:</u>

תהי $\varphi:X\to Y$ שקילות הומוטופית אזי $\varphi_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ איזומורפיזם.

<u>הערה:</u> נניח ש φ שקילות הומוטופית של מרחבים מנוקדים (הם (X,x_0) (Y,y_0))
אם $\psi:Y,y_0\to X,x_0$ כך ש $\varphi\circ\psi\overset{h}{\simeq}Id_Y$ rel y_0, ואשר $\psi\circ\varphi\overset{h}{\simeq}Id_{X,x_0}$. מכאן $\psi_*=\varphi_*^{-1}$.
להוכיח מקרה כללי - תרגיל.

<u>מרחב פשוט קשר:</u>

<u>הגדרה:</u> X נקרא פשוט קשר אם X קשיר מסילתית ו $\pi_1(X)=0$.

<u>למה:</u> הדברים הבאים שקולים;

(1) X פשוט קשר.

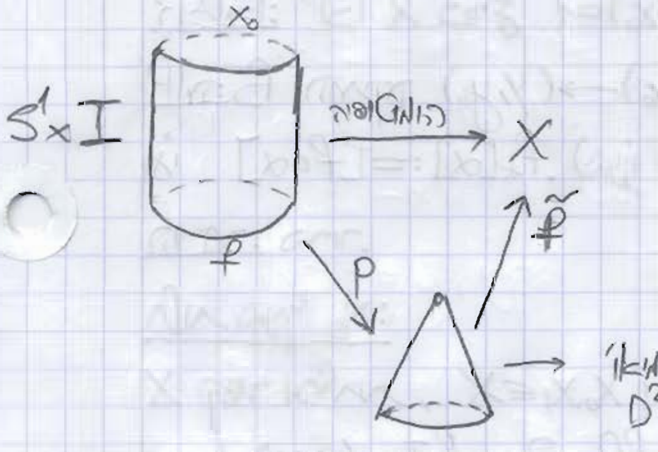
(2) כל שתי מסילות $f,g:I\to X$ עם אותה התחלה וסוף הומוטופיות.

(3) כל העתקה $f:S^1\to X$ הומוטופית להעתקה קבועה.

(4) כל $f:S^1\to X$ ניתנת להרחבה על $\tilde f:D^2\to X$, כך ש $\tilde f|_{\partial D^2}=f$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח $(4)\Leftarrow(3)$.

תהא $f:S^1\to X$ הומוטופית ל x_0.



<u>דוגמא:</u> S^n, $n\geq2$

ל S^n יש מבנה $e^0\cup e^n$. לכן כל העתקה $f:S^1\to S^n$ הומוטופית להעתקה תאית,
לכן חייבת להיות קבועה.

משפט: $X=A\cup B$ כאשר $A\cap B$ קשיר מסילתית. A,B פשוטי קשר ומתקיים אחד מהמקרים הבאים:

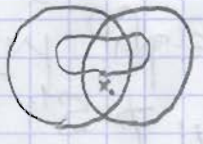
(1) A,B פתוחים ב X.

(2) A,B תתי מרחבים תאיים במרחב תאי X.

אזי X פשוט קשר.

הוכחה:

(1) נקח $x_0\in A\cap B$. תהא f לולאה מבוססת. $[0,1]=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ כיסוי פתוח של קטע. $f^{-1}(A),f^{-1}(B)$ הם איחוד של קטעים פתוחים.



נקח תת כיסוי סופי: $[0,1]=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$. לכן יש סדרה של נק' $0<t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ כך ש $[t_i,t_{i+1}]\subset U_{i+1}$ ולכן $f([t_i,t_{i+1}])$ או ב A או ב B. ($f(t_i)\in A\cap B$!) $A\cap B$ קשיר מסילתית, לכן ניתן לקחת מסילה $\xi_i:[t_i,t_{i+1}]\to A\cap B$. B,A פשוטי קשר ולכן $\xi_i\sim f|_{[t_i,t_{i+1}]}$. כך נעשה מספר סופי של תיקונים וכך נקבל ש f הומוטופית לקב'!

מסקנה: כל של מרחבים פשוטי קשר הינו פשוט קשר.

חבורה יסודית של מכפלה:

משפט: $\pi_1(X\times Y)\simeq\pi_1(X)\times\pi_1(Y)$

הוכחה: מסילה $f:[0,1]\to X\times Y$ ניתנת להצגה של (f_x,f_y) לולאות ב X,Y והומוטופיה של f זה זוג הומוטופיות של f_x ושל f_y.

חבורה יסודית של מעגל

משפט: $\pi_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$.

הוכחה: נג' $p:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$ $.p(x)=e^{2\pi ix}$ $.\varphi_1:[0,1]\hookrightarrow\mathbb{R}$.

$[p\varphi_1]\in\pi_1(S^1)$, $[p\varphi_1]^n\in\pi_1(S^1)$. (נראה שאלו כל האיברים ואף אחד מהם אינו טריוויאלי!

א) נראה כי כל לולאה $f:[0,1]\to(S^1,1)$ הומוטופית ל $p\varphi_n$ כאשר $\varphi_n:[0,1]\to[0,n]$.

נבנה הרמה $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך ש $F(0)=0$, $p\circ F=f$. (זה מספיק, כי F הומו' ל φ_n ! $[p\varphi]^n=[p\varphi_n]$).

נחלק את $[0,1]$ $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=1$ כך ש $f[t_i,t_{i+1}]\neq S^1$,

נרים את $f|_{[t_0,t_1]}$. $f([t_0,t_1])\subset S^1\setminus\{s_0\}$. המקור של $S^1\setminus\{s_0\}$ זה איחוד קטעים מאורך 1 פתוחים זרים. אחד מהם מכיל את 0, נסמן אותו ב J.

והרי $p|_J : J \to S^1\setminus\{s_0\}$ הומאומורפיזם. לכן ניתן להגדיר $F|_{[t_0,t_1]} := (p|_J)^{-1}\circ f|_{[t_0,t_1]}$.

נתבונן ב $\mathrm{Im} f|_{[t_1,t_2]} \subset S^1\setminus\{s_1\}$.

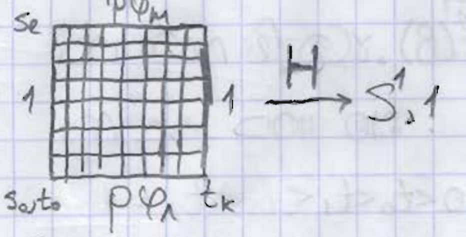
נעשה אותו תהליך, ונבחר את הקטע J_1 כך ש $F(t_1)\in J_2$. שוב $F|_{[t_1,t_2]} = (p|_{J_2})^{-1}\circ f|_{[t_1,t_2]}$.

אז $F|_{[t_0,t_2]}$ רציפה ומקיימת את הנדרש.

באופן כזה מקבלים F כנדרש.

אז $F(1)=n\in\mathbb{Z}$. לכן $F \overset{h}{\simeq} \varphi_n$ ולכן $f = p\circ F \sim p\circ\varphi_n \overset{h}{\simeq} (p\varphi)^n$.

ב) נוכיח כי $p\varphi_n \overset{h}{\not\simeq} p\varphi_m$ כאשר $n\neq m$. נבנה הרמה להומוטופיה. נניח $p\varphi_n \overset{h}{\simeq} p\varphi_m$



ניתן לחלק את הריבוע לריבועים קטנים, כך ש $H|_{q_{ij}} \not\twoheadrightarrow S^1$. בונים $\tilde{H}:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ כך ש $p\circ\tilde{H}=H$. אז $H|_{q_{ij}}(q_{ij})\subset S^1\setminus\{s_{ij}\}$ איזה קטע

נבחר? ל q_{00} נבחר את הקטע שמכיל את 0. אחרת נבחר את הקטע שמכיל את $\tilde{H}|_{q_{i'j'}}$ כאשר $q_{i'j'}$ הריבוע הקודם $\Rrightarrow$...

$\tilde{H}$ הומוטופיה של מסילות - כי $H(0,s)\to 1\in S^1$. לכן $\tilde{H}(0,s)\to\mathbb{Z}$ ולכן $\tilde{H}(0,s)=0$

לכל s. כנ"ל לגבי 1. לכן $\tilde{H}$ הומוטופיה של φ_m,φ_n ולכן בהכרח $m=n$. ■

<u>מסקנות:</u>

(1) המשפט היסודי של האלגברה: לכל $f\in\mathbb{C}[z]$ עם $\deg f\geq 1$ יש שורש.

אכן, נניח $f\neq 0$ לכל z. נתבונן בלולאות $\alpha_r(s) := \frac{f(re^{2\pi is})/f(r)}{|\text{—}|\text{—}|}$, $s\in[0,1]$

כאשר $0<r<\infty$. $\alpha_r:[0,1]\to S^1$. הלולאות כמובן הומוטופיות. אבל אם

$r\gg 1$ $f|_{S^1_r} = z^n(1+O(\frac{1}{|z|}))$ ולכן $\alpha_r \overset{h}{\simeq} \tilde{\alpha}_r \xrightarrow{z^n} S^1$, $[\tilde{\alpha}_r]=[p\varphi_n]$! אבל

עבור $r=0$ נקבל לולאה קבועה. זו סתירה.

(2) $\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{R}^n$ כאשר $n\neq 2$. אכן, S^1 הינו הרטרקט דפורמציוני של $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. לכן:

$\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})=\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})=\pi_1(S^{n-1})=0$

(3) ∂D^2 אינו רטרקט של D^2. אכן, אם $r:D^2\to S^1$ רטרקט, יש סדרה

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & D^2 \arrow[r, two heads, "r"] & S^1 \end{tikzcd}$$

ולכן יש סדרה

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

זה לא ייתכן.

(4) (נק' שבת של בראואר)

לכל $f:D^2\to D^2$ יש נק' שבת. אכן, אם אין נק' שבת ניתן לבנות רטרקט $r:D^2\to S^1$ כמו בציור:

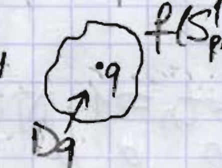
(5) (domain invariance)

תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה ו $f:U\to\mathbb{R}^n$ חח"ע ורציפה אזי $f(U)\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה ו $f:U\to f(U)=V$ הומיאומורפיזם.

$n=1$ זה קל.

$n=2$:

תהא $p\in U$ ו $\overline{D_{p,\varepsilon}}$ עבור $\varepsilon>0$ ונניח $\overline{D_{p,\varepsilon}}\subset U$. f הומיאומורפיזם על $D_{p,\varepsilon}$ כי זו העתקה מקומפקט להאוסדורף. לכן $f(S^1_{p,\varepsilon})\cong S^1_{p,\varepsilon}$.

לפי משפט ז'ורדן 

יש לנו $q\in\tilde{D}_q\simeq D^2$ ו q נקודת פנים.

נראה ש $\tilde{D}_q\subset f(D_{p,\varepsilon})$ זה מספיק. נניח קיימת $q_0\in\tilde{D}_q$ כך ש $q_0\notin f(D_{p,\varepsilon})$. אז קיימת רטרקציה $\tilde{r}:\tilde{D}_q\setminus\{q_0\}\to f(S^1_{p,\varepsilon})$, ולכן יש $D_{p,\varepsilon}\to\tilde{D}_q\setminus\{q_0\}\xrightarrow{\tilde{r}}f(S^1_{p,\varepsilon})\xrightarrow{\simeq}S^1_{p,\varepsilon}$ זו רטרקציה מעיגול למעגל, סתירה.

<u>דוגמא:</u> $\pi_1(S^1\times S^1)=\mathbb{Z}^2$

<u>משפט Van Kampen</u>

הכנה- מכפלה חופשית של חבורות $G_\alpha,\ \alpha\in A$.

(1) $\prod_{\alpha\in A}G_\alpha=(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ עם פעולה בכל קואורדינטה בנפרד.

$\cup$

(2) $\bigoplus_{\alpha\in A}G_\alpha$ כל וקטור רק מספר סופי של קואורדינטות לא טריוויאליות.

(3) $\ast_{\alpha\in A}G_\alpha$ —כל אבר בו מילה סופית כאשר אותיות הן איברים מהאיחוד. נוסיף יחס- כל אברי יחידה הן אותו אבר. הפעולה היא שרשור. נוסיף יחסים של כפל אם יש 2 אותיות שכנות מאותו G_α ניתן "לכפול" אותן.

דוגמא: $F_2=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ – $a^{n_1}b^{m_2}a^{n_2}\ldots$ או $b^{m_1}a^{n_1}\ldots$.

למה: כל סדרה של הומומורפיזמים $\varphi_\alpha:G_\alpha\to H$ ניתנת להרחבה עד $\varphi:*G_\alpha\to H$.

משפט: יהי $X=\bigcup_\alpha A_\alpha$ כך ש $x_0\in\bigcap_\alpha A_\alpha\neq\emptyset$. $j_\alpha:\pi_1(A_\alpha,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ מושרה ע"י שיכון.
ו $i_{\alpha\beta}:\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta,x_0)\to\pi_1(A_\alpha,x_0)$ גם מושרה ע"י שיכון.

תנאים:

(1) $X=\bigcup_\alpha A_\alpha$ כיסוי פתוח.

(2) $x_0\in\bigcap_\alpha A_\alpha$.

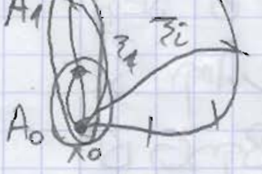
אז:

(1) אם לכל α,β $A_\alpha\cap A_\beta$ קשיר מסילתית, $\varphi=*_\alpha j_\alpha:*_\alpha\pi_1(A_\alpha,x_0)\to\pi_1(X)$ הוא על.

(2) אם בנוסף ב $A_\alpha\cap A_\beta\cap A_\gamma$ אז $\operatorname{Ker}\varphi$ נוצר ע"י $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ כאשר $\omega\in\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta,x_0)$ לכל $\alpha\beta$.

הוכחה:

(1) יהי $f:[0,1]\to X$ לולאה, $f(0)=x_0$. קיימת חלוקה $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ כך ש $f|_{[t_i,t_{i+1}]}\subset A_i$. נוכל לפרק $f=f_0\cdot f_1\cdot\ldots\cdot f_{n-1}$



נקח $\xi_0:[0,1]\to A_0\cap A_1$ $\xi(0)=f(t_0)$ ו $\xi_0(1)=f(t_1)$. ואז:

$$[f]=[\underset{\underset{A_0}{\cap}}{(f_0\overline{\xi}_0)}\underset{\underset{A_1}{\cap}}{(\xi_0f_1\overline{\xi}_1)}\underset{\underset{A_2,}{\cap}}{(\xi_1f_2\overline{\xi}_2)}\ldots\quad]\ \ldots$$

וזו הצגה נכונה.