טופולוגיה אלגברית - הרצאה 3

<u>משפט</u>: אם X האוסדורף קומפקטי מקומית אזי $\pi(X,Y)$ - קבוצת רכיבי קשירות מסילתית של $C(X,Y)$.

<u>הוכחה</u>: מסילה ב-$C(X,Y)$ זו העתקה רציפה $I\to C(X,Y)$.
כמו כן, $C(I,C(X,Y))\simeq C(X\times I,Y)$. ■

<u>הגדרה</u>: X,Y נקראים שקולים הומוטופית אם קיימות $f:X\to Y$ ו-$g:Y\to X$ כך ש-$f\circ g\overset{h}{\simeq} Id_Y$ ו-$g\circ f\overset{h}{\simeq} Id_X$.

<u>דוגמא</u>: $A\subset X$, $f_t:X\to X$, $f_0=Id$, $f_t|_A=Id_A$ ו-$f_1(X)\subset A$.
(נקרא דפורמציה). אזי A,X שקולים הומוטופית.
יש $in:A\to X$, $f_1:X\to A$ אז $f_1\circ in=Id_A$. ומצד שני, $in\circ f_1=f_1$ אז $f_1\overset{h}{\simeq} f_0=Id_X$.

<u>משפט</u>: שקילות הומוטופית הינו יחס שקילות של מרחבים טופולוגיים. (קל).

<u>הגדרה</u>: X נקרא כויץ (Contractible) אם הוא שקול הומוטופית לנק'.

<u>דוגמאות</u>: $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n,D^n,\mathbb{R}^\infty,\mathbb{C}^\infty,D^\infty$ וכו'. קבוצה קמורה במרחבים אלה גם כויצה.
S^n, $n\geq 1$ אינה כויצה.

<u>הגדרה</u>: יהיו X,Y מ"ט. כל העתקה $f:X\to X'$ מגדירה העתקה $f^*:\pi(X',Y)\to\pi(X,Y)$.
כלומר, אם $g:X'\to Y$, נגדיר $f^*(g)=g\circ f$, והיא מוגדרת היטב.
לכל $g:Y\to Y'$ נגדיר $g_*:\pi(X,Y)\to\pi(X,Y')$. $h\mapsto \underset{g_*(h)}{g\circ h}$, גם זה מוגדרת היטב.

<u>משפט</u>: הדברים הבאים שקולים:
(1) $X_1\sim X_2$ שקולים הומוטופית.
(2) לכל Y קיימת בייקציה $\varphi_Y:\pi(X_1,Y)\to\pi(X_2,Y)$ כך שלכל $h:Y\to Y'$ הריבוע הבא מתחלף:

$$\begin{array}{ccc}\pi(X_1,Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & \pi(X_2,Y)\\ \downarrow h_* & & \downarrow h_*\\ \pi(X_1,Y') & \xrightarrow{\varphi_{Y'}} & \pi(X_2,Y')\end{array}$$

$\psi_1 \overset{\wedge}{\sim} \psi_2$ (3')

(3) לכל X קיימת בייקציה $\Psi_X:\Pi(X,\psi_1)\to\Pi(X,\psi_2)$ כך שלכל $h:X\to X'$ התרשים הבא חילופי:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi(X,\psi_1) & \xrightarrow{\Psi_X} & \Pi(X,\psi_2) \\
\uparrow h^* & & \uparrow h^* \\
\Pi(X',\psi_1) & \xrightarrow{\Psi_{X'}} & \Pi(X',\psi_2)
\end{array}$$

<u>הוכחה:</u> נוכיח רק $(1)\Leftrightarrow(2)$:

$(2)\Leftarrow(1)$: יש $f:X_1\to X_2$, $g:X_2\to X_1$ כך שהרכבות ההומוטופיות לזהות.

נגדיר $\varphi_y=g^*$, ונראה שהדיאגרמה מתחלפת. (כמובן ש-φ_y בייקציה, $\varphi_y^{-1}=f^*$).

$(1)\Leftarrow(2)$: נקח $y=X_2$: $\quad y=X_2$

נקח f שעוברת ל-$[Id_{X_2}]$ ע"י φ_{X_2}:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi(X_1,X_2) & \xrightarrow{\varphi_{X_2}} & \Pi(X_2,X_2) \\
\Psi & & \Psi \\
[f] & \longmapsto & [Id_{X_2}]
\end{array}$$

נקח $y=X_1$ $\quad \Pi(X_1,X_2)\xrightarrow{\varphi_{X_1}}\Pi(X_2,X_1)$ נבדוק כי f,g מהווים שקילות ההומוטופית. נגדיר:

$$[Id_{X_1}]\longmapsto[g]$$

קיבלנו 2 דיאגרמות, נצייר אותן כך:

$$\begin{array}{ccc}
 & & [Id_{X_2}],[g\circ f] \\
[f]\in\Pi(X_1,X_2) & \xrightarrow{\varphi_{X_2}} & \Pi(X_2,X_2)\ f\circ g \\
f_*\uparrow\downarrow g_* & & f_*\uparrow\downarrow g_* \\
\Pi(X_1,X_1) & \xrightarrow{\varphi_{X_1}} & \Pi(X_2,X_1) \\
\Psi & & \Psi \\
[Id_{X_1}] & & [g]
\end{array}$$

מ- diagram ch.. נקבל $[Id_{X_2}]=[\cancel{g\circ f}]\ f\circ g$! $[Id_{X_1}]=[\cancel{f\circ g}]\ g\circ f$. ■

<u>הגדרות:</u>

- $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$
  $f(x_0)=y_0$

- $F:(X,x_0)\times I\to(Y,y_0)$ שים לב את $x_0\times I$ ועדיין בה ההעתקים מוגדרים
  $\forall t,\ F(x_0,t)=y_0$ הומ' רציפה.

$(X,A,A') \to (Y,B,B')$ • $\quad f:(X,A)\to(Y,B)$ •

$A' \subset A^*$, $B' \subset B$ $\quad$ —|— $\quad f(A) \subset B$

$(X;A,A') \longrightarrow (Y;B,B')$ • $\quad F:(X,A)\times I \to (Y,B)$ •

$\forall t,\ x\in A \quad F(x,t)\in B$

<u>מבנה חבורתי ב- $\Pi(X,Y)$:</u>

$\mathcal{C}(X,Y)$ חבורה $\Leftarrow$ Y חבורה

<u>הגדרה:</u> מרחב מנוקד (Y,y_0) נקרא מרחב-H אם קיימות העתקות:

(העתקות במרחבים מנוקדים) ויתקיים: $\quad Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y,\quad Y \xrightarrow{\nu} Y$

(1) $\quad Y \xrightarrow{j_1} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$ כלומר $\mu\circ j_1 \overset{h}{\simeq} Id_Y$, $\mu\circ j_2 \overset{h}{\simeq} Id_Y$

$y \longmapsto (y,y_0) \longmapsto$ "y"

(2) $\quad Y\times(Y\times Y) \xrightarrow{Id\times\mu} (Y\times Y) \xrightarrow{\mu} Y$, $\quad (Y\times Y)\times Y \xrightarrow{\mu\times Id} (Y\times Y) \xrightarrow{\mu} Y$ כלומר $\mu\circ(Id\times\mu) \overset{h}{\simeq} \mu\circ(\mu\times Id)$

(3) $\quad Y \xrightarrow{Id\times\nu} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$ $\quad y \mapsto (y,\nu(y)) \mapsto$ "y_0" כלומר $\mu\circ(Id\times\nu) \sim y_0$, $\mu\circ(\nu\times Id) \sim y_0$ העתקה קבועה.

<u>הגדרה:</u> מרחב (X,x_0) נקרא מרחב H' אם קיימות:

$\mu: X \to X \underset{x_0}{\vee} X$, $\nu: X\to X$ כך ש:

(1) $\quad X \xrightarrow{\mu} X\vee X \xrightarrow{p_1,p_2} X \overset{h}{\simeq} Id$

(2) $\quad X \xrightarrow{\mu} X\vee X \underset{\mu\vee Id}{\overset{Id\vee\mu}{\longrightarrow}} X\vee(X\vee X)$ כלומר $(Id\vee\mu)\circ\mu \overset{h}{\simeq} (\mu\vee Id)\circ\mu$

(3) $\quad X \xrightarrow{\mu} X\vee X \underset{\nu\vee Id}{\overset{Id\vee\nu}{\longrightarrow}} X \sim x_0$

<u>משפט:</u> אם (Y,y_0) מרחב-H

(X,x_0) מרחב-H'

אזי לכל (Z,z_0) הקבוצה $\begin{bmatrix} \Pi_{pt}(Z,Y) \\ \Pi_{pt}(X,Z) \end{bmatrix}$ היא חבורה לגבי הפעולות:

$$\begin{bmatrix} \mu_*: \Pi(Z,Y\times Y)\to\Pi(Z,Y),\ \nu_*:\Pi(Z,Y)\to(Z,Y) \\ \mu^*: \Pi(X\vee X,Z)\to\Pi(X,Z),\ \nu^*:\Pi(X,Z)\to\Pi(X,Z) \end{bmatrix}$$

כך שגם $f: Z_1 \to Z_2$, $f^*: \pi(Z_2,Y) \to \pi(Z_1,Y)$

$f_*: \pi(X,Z_1) \to \pi(X,Z_2)$ הומומורפיזמים.

הערה: $\pi(Z,Y\times Y) \cong \pi(Z,Y)\times\pi(Z,Y)$; $\pi(X\vee X,Z) \cong \pi(X,Z) * \pi(X,Z)$

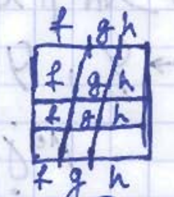
דוגמאות:

(1) מרחב לולאות $\Omega(Z,z_0) := \{f:[0,1]\to Z,\ f(0)=f(1)=z_0\}$ - מרחב H.

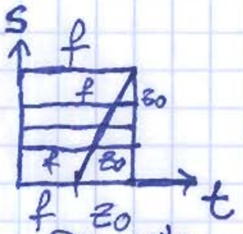
$$\mu(f,g)(t) := \begin{cases} f(2t), & 0\le t\le 1 \\ g(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

$$\nu(f)(t) \overset{def}{=} f(1-t)$$

כלומר ב-s מסוים הולכים רק חלק מהלולאה.



אסוציאטיביות



איבר יחידה

(2) $S(Z)$ מתלה - מרחב H'. $S(Z,z_0) := Z\times I /_{Z\times\{0\},\ Z\times\{1\},\ z_0\times I}$

$$\mu: S(Z) \to S(Z)\vee S(Z)$$

$$\mu(z,t) = \begin{cases} (z,2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ (z,2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

$$\nu(z,t) = (z,1-t)$$

למשל $S^1,\dots,S^n,\dots$ מרחבי H'. לכן $\pi_n(Z,z_0) = \pi(S^n,Z)$ (קבוצה) חבורה הומוטופיה מסדר n.

הוכחה במקרה: (נוכיח רק עבור H')

(1) איבר ניטרלי: $\mu^*([z_0],[f]) = [f\circ(\underbrace{\underset{p_1}{x_0\vee} Id}_{Id_X})\circ\mu] = [f]$ אקסיומה 1

~~מצד שני~~

(2) $\mu^*(\mu^*([f],[g]),[h]) = \mu^*([(f\vee g)\circ\mu],[h]) =$

$= [(f\vee g)\vee h\circ(\mu\vee Id)\circ\mu] \overset{\text{אקסיומה 2}}{=} [(f\vee g\vee h)\circ(Id\vee\mu)\circ\mu] =$

$= \mu^*([f],\mu^*([g],[h]))$ אסוציאטיביות

(3) איבר הפכי: $\mu^*(\nu^*[f],f) = [f\circ\underbrace{(\nu\circ Id)\circ\mu}_{x_0}] = [f(x_0)] = [z_0]$ אקסיומה 3

משפט (הופכי)

יהי Y מ"ט ו- $\Phi_Y : \mathcal{T}op \longrightarrow Set$ פונקטור,

$$(Z,z_0) \longmapsto \pi_{pt}(Z,Y)$$

$$(f: Z_1 \to Z_2) \longmapsto f^*(\pi_{pt}(Z_2,Y) \to \pi_{pt}(Z_1,Y))$$

ונניח שלכל (Z,z_0), $\pi_{pt}(Z,Y)$ חבורה ו- f^* הומומורפיזם. אזי Y מרחב H.

<u>הוכחה</u>: נבנה $\mu: Y\times Y \longrightarrow Y$ ו- $\nu: Y\longrightarrow Y$, כך שיתקיימו האקסיומות.

הגדרת μ: $\pi(Y,Y)\times\pi(Y,Y) = \pi(Y\times Y, Y)$. ב- π יש שני איברים קנוניים,

והם $[p_1],[p_2]$. נגדיר את μ להיות הנציג של $[p_1][p_2]$.

הגדרת ν: ב- $\pi(Y,Y)$ יש איבר קנוני $[Id_Y]$ (לא איבר יחידה!).

נגדיר את ν ע"י $[\nu] = [Id_Y]^{-1}$.

$$[\mu(y_0, Id)] = [p_1\circ(y_0,Id)]\cdot[p_2\circ(y_0\circ Id)] = \quad (1)\text{(איבר יחידה)}^{*}\text{think}$$

$$= [y_0][Id] = [Id]$$

$$[\mu(\mu(Id_I, Id_{II}), Id_{III})] = [\mu(Id_I,Id_{II}), Id_{III}] = \quad (2)\text{(אסוציאטיביות)}^{*}\text{think}$$

$$= [Id_I][Id_{II}][Id_{III}]^{**}$$

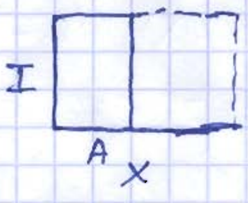
אסוציאטיביות שקיימת

$$[\mu(Id_I, \nu_{III})] = [Id_I][\nu] = [y_0] \quad (3)\text{(איבר הופכי)}^{*}\text{think}$$

לפי הגדרת ν

<u>תכונות הומוטופיות של מרחבים תאיים</u>

(1) HEP Homotopy Extension Property



(2) משפט קירוב תאי:

$f: X\to Y$ אז $\tilde f: X\to Y$ תאי, כלומר $\tilde f(X^n) \subseteq Y^n$.