

05/03/2012
W1D2

אלגברה ב' 2

פרק 3 ו-4

אין מושג

עזרים:

D. Cox: Galois Theory

J. Rotman: "

I. Stewart: "

J. Howie: "

S Lang: Algebra

J.P. Tignol: Galois theory of Algebraic Equations

בפרקן והשאלה ממשיכה

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$a=1$ נניח $a \neq 0$ נניח

$$x = y - \frac{b}{3}$$

נניח $b=0$

$$(y - \frac{b}{3})^3 + b(y - \frac{b}{3})^2 + c(y - \frac{b}{3}) + d = 0$$

$$y^3 - 3y^2 \cdot \frac{b}{3} + 3y(\frac{b}{3})^2 - \frac{b^3}{27} + b(y^2 - 2y\frac{b}{3} + \frac{b^2}{9})$$

$$+ cy - \frac{cb}{3} + d = 0$$

השאלה ממשיכה נניח $a \neq 0$ נניח $a=1$ נניח $b=0$ נניח $c \neq 0$ נניח $d \neq 0$

$$y^3 + py + q = 0$$

הפרק $\frac{1}{3}$ tantaglia

$$y = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$$

המשוואה החדשה

$$t + u + 3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u} + 3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u} + p(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}) + q = 0$$

$$t + u + q + (3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u} + p)(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}) = 0$$

$$3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u} + p = 0 \quad \text{או} \quad t + u + q = 0 \quad \text{: (1) (2)}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u} = -\frac{p}{3}$$

$$tu = (-\frac{p}{3})^3$$

$$-t^2 - qt = (-\frac{p}{3})^3 \quad \text{: (3)} \quad u = -t - q \quad \text{: (4)}$$

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

: sp ✓

$$t = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$

: 4

$$t = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u = -t - q = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

: 11

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cordano

IKNOI

IKD P IK

— 114N 213

$$y = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{10}}$$

$$y_1 = \omega \sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}} + \omega^2 \sqrt[3]{-3 - \sqrt{10}}$$

$$y_2 = \omega^2 \sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}} + \omega \sqrt[3]{-3 - \sqrt{10}}$$

מחזורי - כקצו"ס"ר :

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

ערב $y: 2, -4$ p^2 -

$$(y-2)^2(y+4)=0$$

$$y^3 + 2y + 16 = 0$$

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -4^3 - 8^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{-8+0} + \sqrt[3]{-8+0} = -2 - 2 = -4$$

$$\omega \sqrt[3]{-8} + \omega^2 \sqrt[3]{-8}$$

$$= -2(\omega + \bar{\omega}) = -2(2 \operatorname{Re}(\omega)) = 2$$

$$(\omega = \sqrt[3]{1})$$

(3)

$$x^3 + x - 2 = 0$$

$$x=1$$

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{27} + 1 = \frac{28}{27}$$

$$y = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{28}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{28}{3}}} = 1$$

$$\sqrt[3]{1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{28}{3}}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{28}{3}}$$

casus irreducibilis מקרה

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad (4)$$

הצורה הכללית $x^3 + px + q = 0$

$$(x-4)(x^2+4x+1) = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

הנוסחה:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -125 + 4 = -121$$

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

הצורה הכללית $x^3 + px + q = 0$ מקרה
כך שהמכנה של p הוא -12

הצורה הכללית $x^3 + px + q = 0$ מקרה

$$u=0,1,2 \quad x_k = \omega^k \sqrt[3]{2+11i} + \omega^{3-k} \sqrt[3]{2-11i}$$

$$\left(\sqrt[3]{2+11i} = 2+i \right) \quad \text{מקרים:}$$

Tartaglia: $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} \stackrel{?}{=} u+\sqrt{v}$

$$a+\sqrt{b} = u^3 + 3u^2\sqrt{v} + 3uv + \sqrt{v^3}$$

$$a+\sqrt{b} = u^3 + 3uv + (3u^2 + v)\sqrt{v}$$

$$\begin{cases} a = u^3 + 3uv & (1) \\ \sqrt{b} = (3u^2 + v)\sqrt{v} & (2) \end{cases} \quad : (2) \cdot 3$$

נקים במקרה זה:

$$a+\sqrt{b} = (u+\sqrt{v})^3 \quad \text{או} \quad a-\sqrt{b} = (u-\sqrt{v})^3$$

נכנס לריבוע

$$a^2 - b = (u^2 - v)^3$$

$$\sqrt[3]{a^2 - b} = u^2 - v$$

$$v = u^2 - \sqrt[3]{a^2 - b}$$

נציב (1) ב-(2):

$$a = u^3 + 3u(u^2 - \sqrt[3]{a^2 - b})$$

$$4u^3 - 3\sqrt[3]{a^2 - b} \cdot u - a = 0$$

זהו משוואה מעוקלת של גרד (3) שיש לה פתרון רציונלי.
 נניח שיש פתרון רציונלי $u = \frac{p}{q}$ (כאן p, q הם מספרים שלמים).
 נכנס למכנה q^3 ונקבל משוואה מעוקלת של גרד.
 נניח שיש פתרון רציונלי $u = \frac{p}{q}$ (כאן p, q הם מספרים שלמים).
 נכנס למכנה q^3 ונקבל משוואה מעוקלת של גרד.

(3) מצאנו

המשוואה

היא

$$x^3 + x - 2 = 0$$

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}} = u + \sqrt{v}$$

המשוואה היא

$$a=1 \quad b=\frac{28}{27}$$

$$a^2-b = -\frac{1}{27}, \quad \sqrt[3]{a^2-b} = -\frac{1}{3}$$

המשוואה היא

$$4u^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)u - 1 = 0$$

המשוואה היא

$$4u^3 + u - 1 = 0$$

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4} : \text{נבדוק}$$

$$u = \frac{1}{2}$$

$$v = u^2 - \sqrt[3]{a^2-b} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

המשוואה היא

המשוואה היא
המשוואה היא