W4D2 26/03/2012 הרצאה 3

תזכורת:

A, B חוגים קומוטטיביים - אלגברה F מעל A היא חוג B יחד עם העתקה $A \to B$ כך ש-F מרחב וקטורי מעל A עם בסיס $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$

$$M = \left\{ \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \otimes e_\alpha \;\middle|\; \begin{array}{l} a_\alpha \in A \\ \text{כמעט כולם } a_\alpha = 0 \end{array} \right\}$$

- $\sum_\alpha a_\alpha \otimes e_\alpha + \sum_\alpha a'_\alpha \otimes e_\alpha = \sum_\alpha (a_\alpha + a'_\alpha) \otimes e_\alpha$

$$t \cdot \left(\sum_\alpha a_\alpha \otimes e_\alpha \right) = \sum_\alpha t a_\alpha \otimes e_\alpha$$

$$\left(\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \otimes e_\alpha \right) \left(\sum_{\beta \in I} a'_\beta \otimes e_\beta \right) = \sum_{\alpha \in I} \left(\sum_{\gamma \in I} x^\gamma_{\alpha\beta} a_\alpha a'_\beta \right) \otimes e_\gamma$$

$$e_\alpha e_\beta = \sum_{\gamma \in I} x^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma \qquad (x^\gamma_{\alpha\beta} \in F)$$

- הכפל A- נסמן $\otimes$ ונגדיר:

$$a \otimes b = \sum_{\alpha \in I} t_\alpha \cdot a \otimes e_\alpha$$

$$b = \sum_{\alpha \in I} t_\alpha e_\alpha$$

כי - נגדיר $(a,b) \mapsto a \otimes b$

A-ב, B-ת

(כלומר ש:

$$(a_1 \otimes b_1)\cdot(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

(כלומר:

$$b_1 = \sum_{\alpha \in I} t_\alpha e_\alpha \quad , \quad b_2 = \sum_{\beta \in I} s_\beta e_\beta$$

$$b_1 b_2 = \sum_{\alpha,\beta \in I} t_\alpha s_\beta e_\alpha e_\beta = \sum_{\gamma,\rho \in E} t_\alpha s_\rho \, X^{\varepsilon}_{\alpha,\rho} \, e_\varepsilon =$$

$$= \sum_{\varepsilon \in I} \Big(\underbrace{\sum_{\alpha,\rho \in I} t_\alpha s_\rho X^{\varepsilon}_{\alpha,\rho}}_{r_\varepsilon \in F} \Big) \cdot e_\varepsilon$$

מ"מ $a_1 \otimes a_2 \otimes b_1 b_2 = \sum_{\varepsilon \in I} r_\varepsilon a_1 a_2 \otimes e_\varepsilon =$

$$= \sum_{\varepsilon} \Big(\sum_{\alpha,\rho} t_\alpha s_\rho X^{\varepsilon}_{\alpha,\rho} \Big) a_1 a_2 \otimes e_\varepsilon$$

מצד שני $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = \Big(\sum_{\alpha \in I} t_\alpha a_1 \otimes e_\alpha \Big) \Big(\sum s_\beta a_2 \otimes e_\beta \Big)$

$$= \sum_{\varepsilon \in I} \Big(\sum_{\alpha,\beta} t_\alpha s_\beta X^{\varepsilon}_{\alpha,\beta} a_1 a_2 \Big) \otimes e_\varepsilon \qquad \checkmark$$

הוכחה:

$$\Big(\sum a_\alpha \otimes e_\alpha \Big) \Big(\sum a'_\beta \otimes e_\beta \Big) = \sum_{\alpha,\beta \in I} a_\alpha a'_\beta \otimes e_\alpha e_\beta$$

יהי $\{e'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ בסיס אחר ל-β מעל F.

נכתוב $e_\alpha = \sum_{\beta\in I} s_{\beta\alpha} e'_\beta$, $s_{\beta\alpha}\in I$

$$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha \otimes e_\alpha = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \otimes \Big(\sum_{\beta\in I} s_{\beta\alpha} e'_\beta\Big) =$$

$$= \sum_{\beta\in I} \underbrace{\Big(\sum_{\alpha\in I} s_{\beta\alpha} a_\alpha\Big)}_{a'_\beta} \otimes e'_\beta = \sum a'_\beta \otimes e'_\beta$$

כלומר, ניתן להחליף בסיסים.

- הייצוג בכל בסיס הוא יחיד:

$$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha \otimes e'_\alpha = \sum_{\alpha\in I} b_\alpha \otimes e'_\alpha \Rightarrow a_\alpha = b_\alpha \quad \forall \alpha\in I$$

די להראות: $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha \otimes e'_\alpha = 0 \Rightarrow a_\alpha = 0 \quad \forall\alpha\in I$

נכתוב:

$$e'_\alpha = \sum_{\beta\in I} t_{\beta\alpha} e_\beta \qquad t_{\beta\alpha}\in F$$

$$\sum_{\beta\in I} \Big(\sum_{\alpha\in I} t_{\beta\alpha} a_\alpha\Big) \otimes e_\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum t_{\beta\alpha} a_\alpha = 0 \quad \forall\beta$$

(כי זאת הטענה של איבר האפס, בבסיס המקורי)

$$e'_\alpha = \sum_{\beta\in I} t_{\beta\alpha} e_\beta = \sum_{\beta\in I} t_{\beta\alpha} \sum_{\gamma\in I} s_{\gamma\beta} e'_\gamma =$$

$$= \sum_{\gamma\in I} \Big(\sum_{\beta\in I} s_{\gamma\beta} t_{\beta\alpha} \Big) e'_\gamma$$

$$\Rightarrow \sum_{\beta\in I} s_{\gamma\beta} t_{\beta\alpha} = \begin{cases} 0 & \gamma\neq\alpha \\ 1 & \gamma=\alpha \end{cases}$$

(נכפיל את הסדרות ב- $s_{\gamma\beta}$

$$\sum_{\alpha\in I} t_{\beta\alpha} a_\alpha = 0 \qquad \forall\beta$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{\beta} s_{\gamma\beta} \sum_{\alpha} t_{\beta\alpha} a_\alpha = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{\alpha\in I} \Big(\sum_{\beta\in I} s_{\gamma\beta} t_{\beta\alpha} \Big) a_\alpha = 0$$

$=0$ כש- $\gamma\neq\alpha$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\gamma\in I \quad a_\gamma = 0$$

ולכן, ב שני בסיסים שקולים
(אפשר להשתמש בכל בסיס שנרצה)

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x] \simeq \mathbb{R}[x] \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i \otimes x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$$

$$\mathbb{Q} \quad \mathbb{N}$$

$$r \otimes x^i \longmapsto r x^i$$

$$F \subset K$$

$$K \otimes_F F[x] \simeq K[x] \quad (2)$$

$$(3)$$

$$K \otimes_F M_n(F) \simeq M_n(K)$$

$$\sum r_{ij} \otimes E_{ij} \longmapsto \sum r_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$