

π -Day

14/03/2012

הרצאה

42D4

תחומי כחץ פריק יחידה
(Unique factorization domains)

R חוג, 1 יחידה

- $R^* = \{a \in R \mid a \text{ הפיך}\}$
 R חוג עם סגור
 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (הפכי)

R חוג קומוטטי, 1 יחידה
 R חוג קומוטטי

הצגה:

- $a \neq 0, a, b \in R$ יחידה
 $a \mid b$ (אם a מחלק את b)
 $b = ac$ עבור $c \in R$ קיים

$$b \in R : a \mid b \iff a \mid b$$

$$a \mid b_1 + b_2 \iff a \mid b_1, b_2 \quad (1) \text{ - חוקים}$$

$$a \mid u \cdot b, u \in R \text{ סד} \quad (2)$$

(הצגה) $0 \neq a, b \in R$ u, v
 (associates) a, b $u \in R^*$
 אם $a = u \cdot b$ $b = v \cdot a$ $(a = u \cdot v \cdot b)$
 כן a ו- b שקולים.

(הצגה) a, b $u \in R^*$ $a = u \cdot b$
 אם $a = u \cdot b$ $b = v \cdot a$ $(a = u \cdot v \cdot b)$
 כן a ו- b שקולים.

$$a = b \cdot v = a \cdot u \cdot v$$

$$a(1 - uv) = 0$$

R u, v $uv = 1$ $vu = 1$
 אם $uv = 1$ $vu = 1$
 אז u ו- v הם איברות הפך.

(הצגה) $\alpha \in R \setminus R^*$ α אי-פריק אם $\alpha = a \cdot b$ $a, b \in R$ a, b אי-פריקים.

(הצגה) $\alpha \in R \setminus R^*$ α אי-פריק אם $\alpha = a \cdot b$ $a, b \in R$ a, b אי-פריקים.

$$a \mid bc \Rightarrow a \mid c \text{ אם } a \text{ ו-} b \text{ אי-פריקים}$$

$$(a, b) = 1$$

אם $a \in R$ אז $a \in R^*$ $\Leftarrow$ $a \in R^*$ - כל דבר

הוכחה:
 יהי $a \in R^*$ רגור.
 יהי $b \in R$ כן
 אז $a = b \cdot c$
 אז $a/b = c$, $a/b \in R$, אז $a/b \in R^*$

(כ) $a \in R^*$ (אם a הוא איבר הפוך)
 אז $a/b \in R^*$ - סגור.
 כלומר a/b הוא הפוך של b .

אם $a/b \in R^*$ אז $a/b = c/d$ וכן $a/b \in R^*$ - כל דבר
 וכן $a/b \in R^*$ וכן $a/b \in R^*$ (הכלים)
 נגד: $a/b \in R^*$ - הפך:

קיים $u \in R^*$ כן $a = u \cdot c = b \cdot c$
 ו- R הוא אידיאל, נקיים $u = b$
 כלומר, b הפך.

על

-הכלים של R^* נקראים הפכים:

(b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l) (m) (n) (o) (p) (q) (r) (s) (t) (u) (v) (w) (x) (y) (z) (aa) (ab) (ac) (ad) (ae) (af) (ag) (ah) (ai) (aj) (ak) (al) (am) (an) (ao) (ap) (aq) (ar) (as) (at) (au) (av) (aw) (ax) (ay) (az) (ba) (bb) (bc) (bd) (be) (bf) (bg) (bh) (bi) (bj) (bk) (bl) (bm) (bn) (bo) (bp) (bq) (br) (bs) (bt) (bu) (bv) (bw) (bx) (by) (bz) (ca) (cb) (cc) (cd) (ce) (cf) (cg) (ch) (ci) (cj) (ck) (cl) (cm) (cn) (co) (cp) (cq) (cr) (cs) (ct) (cu) (cv) (cw) (cx) (cy) (cz) (da) (db) (dc) (dd) (de) (df) (dg) (dh) (di) (dj) (dk) (dl) (dm) (dn) (do) (dp) (dq) (dr) (ds) (dt) (du) (dv) (dw) (dx) (dy) (dz) (ea) (eb) (ec) (ed) (ee) (ef) (eg) (eh) (ei) (ej) (ek) (el) (em) (en) (eo) (ep) (eq) (er) (es) (et) (eu) (ev) (ew) (ex) (ey) (ez) (fa) (fb) (fc) (fd) (fe) (ff) (fg) (fh) (fi) (fj) (fk) (fl) (fm) (fn) (fo) (fp) (fq) (fr) (fs) (ft) (fu) (fv) (fw) (fx) (fy) (fz) (ga) (gb) (gc) (gd) (ge) (gf) (gg) (gh) (gi) (gj) (gk) (gl) (gm) (gn) (go) (gp) (gq) (gr) (gs) (gt) (gu) (gv) (gw) (gx) (gy) (gz) (ha) (hb) (hc) (hd) (he) (hf) (hg) (hh) (hi) (hj) (hk) (hl) (hm) (hn) (ho) (hp) (hq) (hr) (hs) (ht) (hu) (hv) (hw) (hx) (hy) (hz) (ia) (ib) (ic) (id) (ie) (if) (ig) (ih) (ii) (ij) (ik) (il) (im) (in) (io) (ip) (iq) (ir) (is) (it) (iu) (iv) (iw) (ix) (iy) (iz) (ja) (jb) (jc) (jd) (je) (jf) (jg) (jh) (ji) (jj) (jk) (jl) (jm) (jn) (jo) (jp) (jq) (jr) (js) (jt) (ju) (jv) (jw) (jx) (jy) (jz) (ka) (kb) (kc) (kd) (ke) (kf) (kg) (kh) (ki) (kj) (kk) (kl) (km) (kn) (ko) (kp) (kq) (kr) (ks) (kt) (ku) (kv) (kw) (kx) (ky) (kz) (la) (lb) (lc) (ld) (le) (lf) (lg) (lh) (li) (lj) (lk) (ll) (lm) (ln) (lo) (lp) (lq) (lr) (ls) (lt) (lu) (lv) (lw) (lx) (ly) (lz) (ma) (mb) (mc) (md) (me) (mf) (mg) (mh) (mi) (mj) (mk) (ml) (mm) (mn) (mo) (mp) (mq) (mr) (ms) (mt) (mu) (mv) (mw) (mx) (my) (mz) (na) (nb) (nc) (nd) (ne) (nf) (ng) (nh) (ni) (nj) (nk) (nl) (nm) (nn) (no) (np) (nq) (nr) (ns) (nt) (nu) (nv) (nw) (nx) (ny) (nz) (oa) (ob) (oc) (od) (oe) (of) (og) (oh) (oi) (oj) (ok) (ol) (om) (on) (oo) (op) (oq) (or) (os) (ot) (ou) (ov) (ow) (ox) (oy) (oz) (pa) (pb) (pc) (pd) (pe) (pf) (pg) (ph) (pi) (pj) (pk) (pl) (pm) (pn) (po) (pp) (pq) (pr) (ps) (pt) (pu) (pv) (pw) (px) (py) (pz) (qa) (qb) (qc) (qd) (qe) (qf) (qg) (qh) (qi) (qj) (qk) (ql) (qm) (qn) (qo) (qp) (qq) (qr) (qs) (qt) (qu) (qv) (qw) (qx) (qy) (qz) (ra) (rb) (rc) (rd) (re) (rf) (rg) (rh) (ri) (rj) (rk) (rl) (rm) (rn) (ro) (rp) (rq) (rr) (rs) (rt) (ru) (rv) (rw) (rx) (ry) (rz) (sa) (sb) (sc) (sd) (se) (sf) (sg) (sh) (si) (sj) (sk) (sl) (sm) (sn) (so) (sp) (sq) (sr) (ss) (st) (su) (sv) (sw) (sx) (sy) (sz) (ta) (tb) (tc) (td) (te) (tf) (tg) (th) (ti) (tj) (tk) (tl) (tm) (tn) (to) (tp) (tq) (tr) (ts) (tt) (tu) (tv) (tw) (tx) (ty) (tz) (ua) (ub) (uc) (ud) (ue) (uf) (ug) (uh) (ui) (uj) (uk) (ul) (um) (un) (uo) (up) (uq) (ur) (us) (ut) (uu) (uv) (uw) (ux) (uy) (uz) (va) (vb) (vc) (vd) (ve) (vf) (vg) (vh) (vi) (vj) (vk) (vl) (vm) (vn) (vo) (vp) (vq) (vr) (vs) (vt) (vu) (vv) (vw) (vx) (vy) (vz) (wa) (wb) (wc) (wd) (we) (wf) (wg) (wh) (wi) (wj) (wk) (wl) (wm) (wn) (wo) (wp) (wq) (wr) (ws) (wt) (wu) (wv) (ww) (wx) (wy) (wz) (xa) (xb) (xc) (xd) (xe) (xf) (xg) (xh) (xi) (xj) (xk) (xl) (xm) (xn) (xo) (xp) (xq) (xr) (xs) (xt) (xu) (xv) (xw) (xx) (xy) (xz) (ya) (yb) (yc) (yd) (ye) (yf) (yg) (yh) (yi) (yj) (yk) (yl) (ym) (yn) (yo) (yp) (yq) (yr) (ys) (yt) (yu) (yv) (yw) (yx) (yy) (yz) (za) (zb) (zc) (zd) (ze) (zf) (zg) (zh) (zi) (zj) (zk) (zl) (zm) (zn) (zo) (zp) (zq) (zr) (zs) (zt) (zu) (zv) (zw) (zx) (zy) (zz) (aa) (ab) (ac) (ad) (ae) (af) (ag) (ah) (ai) (aj) (ak) (al) (am) (an) (ao) (ap) (aq) (ar) (as) (at) (au) (av) (aw) (ax) (ay) (az) (ba) (bb) (bc) (bd) (be) (bf) (bg) (bh) (bi) (bj) (bk) (bl) (bm) (bn) (bo) (bp) (bq) (br) (bs) (bt) (bu) (bv) (bw) (bx) (by) (bz) (ca) (cb) (cc) (cd) (ce) (cf) (cg) (ch) (ci) (cj) (ck) (cl) (cm) (cn) (co) (cp) (cq) (cr) (cs) (ct) (cu) (cv) (cw) (cx) (cy) (cz) (da) (db) (dc) (dd) (de) (df) (dg) (dh) (di) (dj) (dk) (dl) (dm) (dn) (do) (dp) (dq) (dr) (ds) (dt) (du) (dv) (dw) (dx) (dy) (dz) (ea) (eb) (ec) (ed) (ee) (ef) (eg) (eh) (ei) (ej) (ek) (el) (em) (en) (eo) (ep) (eq) (er) (es) (et) (eu) (ev) (ew) (ex) (ey) (ez) (fa) (fb) (fc) (fd) (fe) (ff) (fg) (fh) (fi) (fj) (fk) (fl) (fm) (fn) (fo) (fp) (fq) (fr) (fs) (ft) (fu) (fv) (fw) (fx) (fy) (fz) (ga) (gb) (gc) (gd) (ge) (gf) (gg) (gh) (gi) (gj) (gk) (gl) (gm) (gn) (go) (gp) (gq) (gr) (gs) (gt) (gu) (gv) (gw) (gx) (gy) (gz) (ha) (hb) (hc) (hd) (he) (hf) (hg) (hh) (hi) (hj) (hk) (hl) (hm) (hn) (ho) (hp) (hq) (hr) (hs) (ht) (hu) (hv) (hw) (hx) (hy) (hz) (ia) (ib) (ic) (id) (ie) (if) (ig) (ih) (ii) (ij) (ik) (il) (im) (in) (io) (ip) (iq) (ir) (is) (it) (iu) (iv) (iw) (ix) (iy) (iz) (ja) (jb) (jc) (jd) (je) (jf) (jg) (jh) (ji) (jj) (jk) (jl) (jm) (jn) (jo) (jp) (jq) (jr) (js) (jt) (ju) (jv) (jw) (jx) (jy) (jz) (ka) (kb) (kc) (kd) (ke) (kf) (kg) (kh) (ki) (kj) (kk) (kl) (km) (kn) (ko) (kp) (kq) (kr) (ks) (kt) (ku) (kv) (kw) (kx) (ky) (kz) (la) (lb) (lc) (ld) (le) (lf) (lg) (lh) (li) (lj) (lk) (ll) (lm) (ln) (lo) (lp) (lq) (lr) (ls) (lt) (lu) (lv) (lw) (lx) (ly) (lz) (ma) (mb) (mc) (md) (me) (mf) (mg) (mh) (mi) (mj) (mk) (ml) (mm) (mn) (mo) (mp) (mq) (mr) (ms) (mt) (mu) (mv) (mw) (mx) (my) (mz) (na) (nb) (nc) (nd) (ne) (nf) (ng) (nh) (ni) (nj) (nk) (nl) (nm) (nn) (no) (np) (nq) (nr) (ns) (nt) (nu) (nv) (nw) (nx) (ny) (nz) (oa) (ob) (oc) (od) (oe) (of) (og) (oh) (oi) (oj) (ok) (ol) (om) (on) (oo) (op) (oq) (or) (os) (ot) (ou) (ov) (ow) (ox) (oy) (oz) (pa) (pb) (pc) (pd) (pe) (pf) (pg) (ph) (pi) (pj) (pk) (pl) (pm) (pn) (po) (pp) (pq) (pr) (ps) (pt) (pu) (pv) (pw) (px) (py) (pz) (qa) (qb) (qc) (qd) (qe) (qf) (qg) (qh) (qi) (qj) (qk) (ql) (qm) (qn) (qo) (qp) (qq) (qr) (qs) (qt) (qu) (qv) (qw) (qx) (qy) (qz) (ra) (rb) (rc) (rd) (re) (rf) (rg) (rh) (ri) (rj) (rk) (rl) (rm) (rn) (ro) (rp) (rq) (rr) (rs) (rt) (ru) (rv) (rw) (rx) (ry) (rz) (sa) (sb) (sc) (sd) (se) (sf) (sg) (sh) (si) (sj) (sk) (sl) (sm) (sn) (so) (sp) (sq) (sr) (ss) (st) (su) (sv) (sw) (sx) (sy) (sz) (ta) (tb) (tc) (td) (te) (tf) (tg) (th) (ti) (tj) (tk) (tl) (tm) (tn) (to) (tp) (tq) (tr) (ts) (tt) (tu) (tv) (tw) (tx) (ty) (tz) (ua) (ub) (uc) (ud) (ue) (uf) (ug) (uh) (ui) (uj) (uk) (ul) (um) (un) (uo) (up) (uq) (ur) (us) (ut) (uu) (uv) (uw) (ux) (uy) (uz) (va) (vb) (vc) (vd) (ve) (vf) (vg) (vh) (vi) (vj) (vk) (vl) (vm) (vn) (vo) (vp) (vq) (vr) (vs) (vt) (vu) (vv) (vw) (vx) (vy) (vz) (wa) (wb) (wc) (wd) (we) (wf) (wg) (wh) (wi) (wj) (wk) (wl) (wm) (wn) (wo) (wp) (wq) (wr) (ws) (wt) (wu) (wv) (ww) (wx) (wy) (wz) (xa) (xb) (xc) (xd) (xe) (xf) (xg) (xh) (xi) (xj) (xk) (xl) (xm) (xn) (xo) (xp) (xq) (xr) (xs) (xt) (xu) (xv) (xw) (xx) (xy) (xz) (ya) (yb) (yc) (yd) (ye) (yf) (yg) (yh) (yi) (yj) (yk) (yl) (ym) (yn) (yo) (yp) (yq) (yr) (ys) (yt) (yu) (yv) (yw) (yx) (yy) (yz) (za) (zb) (zc) (zd) (ze) (zf) (zg) (zh) (zi) (zj) (zk) (zl) (zm) (zn) (zo) (zp) (zq) (zr) (zs) (zt) (zu) (zv) (zw) (zx) (zy) (zz)

TFAE

הכיוון ההפוך: קולות:

1. a - כל סדר
2. $R \cdot a \in R$ אידיאל נקבות
3. R/Ra מה
4. a - האל
5. $Ra \subset R$ האל

הוכחה:

(1) $\Rightarrow$ (2) : נניח $Ra \subsetneq R$, אז $a \in Ra$, כלומר $a = r \cdot a$,
 אז $a(1-r) = 0$, כלומר $a \in \text{ann}(1-r)$,
 נניח $I = \text{ann}(1-r)$, אז $Ra \subset I \subset R$,
 נניח R הוא שדה , אז I אידיאל זרוע ,
 אז $I = R \cdot b$, כלומר $b \in R$,
 אז $b \mid a \iff a \in Rb \iff Ra \subset Rb$,
 אז $a \in Rb$, כלומר $a = r \cdot b$,
 אז $b = u \cdot a$, כלומר $a \in Ra$,
 אז $I = R \cdot b = R \cdot u \cdot a = R \cdot a$,
 אז $I = R \cdot b = R$, כלומר $b \in R$.

לע

(2) $\Rightarrow$ (3)

(3) $\Rightarrow$ (4)

$a \mid b \cdot c$ נ"ן

$r \in R$ זכור $bc = r \cdot a$

הצגה ממוחזרת $v: R \rightarrow R/Ra$ י"י

$$v(b) \cdot v(c) = v(bc) = v(r \cdot a) = 0$$

R/Ra כ"ו "0"

$v(c) = 0$ אם $v(b) = 0$ אז R/Ra זכור

$c \in Ra$ אם $b \in Ra$ אז

$a \mid c$ אם $a \mid b$ אז

סגור

ההפך נכון (5) $\Leftrightarrow$ (4)

כבר האנו באופן כללי (4) $\Rightarrow$ (1)

ל.ע.נ

אנשים:

י. R ויום שמי, כך $\mathbb{Z}$ איבר
 א' - פירק R סט גם
 ראשון (למשל R ויום שמי ראשון).

ויה כ

$$P_1 P_2 \dots P_r = q_1 q_2 \dots q_s$$

כאשר $P_1, \dots, P_r, q_1, \dots, q_s$ פרקים.
 א' - פרקים.
 וזו כלל א'ן סדר, $r = l$
 חזקת: P_1, q_1 וברב r $1 \leq i \leq r$

פירוק:

P_1 א' פירק, יבואן $P_1 | q_1 \dots q_s$
 P_2 סטן, וכן $P_2 | q_1 \dots q_s$
 כך $P_3 | q_1 \dots q_s$
 q_1 א' פירק, וכן $P_1 | q_1$ - לא יבוא, אסור
 חזן P_1, q_1 וברב.

(כתוב: $q_i = u_i \cdot P_i$, $u_i \in R'$ וכן

ז' א'ן סדר, ויה כהכ $i = 1$.

$$P_1 P_2 \dots P_r = u_1 P_1 q_2 \dots q_s$$

R ויום שמי, וכן סדרה:

$$P_2 P_3 \dots P_r = (u_1 q_2 \dots q_s) = q_2' \dots q_s'$$

א' - פרקים

משק, האנציקלדיה, סטק $\min\{r, s\}$ פרקים.

אם $r \neq s$, כהכ ואלו $r = s$, נקראו

$$P_1 \dots P_r = q_1 \dots q_s$$

משק

כסדר מ, $r = l$
 וכן P_1, q_1 וברב r $1 \leq i \leq r$
 סדר סדר

מסקל:

יה R קרום אלו - ימס.

זכר RIR אומר R

נמן ארובה כמחלה של איברים

או - פריקים.

מבאטן תקומה, כעס לה יחיד צד כדי

סדר האורח, ומחלה צד יז-סדר כורסא

- קום אלו הוא נכון לט - נקרא

תחב פריק - יחיד.

הוכחה: נניח צרכים - קיים פריק

יה $RIR \in a$.

אם a או פריק - סימון.

אחר קיימים $RIR \in a, a_2, a_1$ כך $a = a_1, a_2$.

אם a, a_1, a_2 אי-פריקים - סימון.

אחר - נניח גם a_1, a_2 אי-פריקים.

צ"ל: הרישק מסתירה.

נניח כשלה, מהרישק לא מסתירה.

אז, יש סדרה אנכסית של אברי R :

$a_1, a_2, \dots$ כך $a = a_1 \cup a_2 \cup \dots$

ובאם a פריקים וכן $a_1, a_2, \dots$ אי-פריקים.

אז, בהכרח: $Rb_1 \cup Rb_2 \cup \dots$

אז, האורח $\bigcup_{i=1}^{\infty} Rb_i$ הוא אורח.

R מן המין Rb_i הרישק הנ"ל, וזכר

ז"ל אבר R , כלומר קיים Rb

כך $Rb = \bigcup_{i=1}^{\infty} Rb_i$

של i , מקיים $Rb_i \subset Rb$.

$$d = \min(r_1, t_1) \dots \min(r_s, t_s) \quad (\text{לדבר:})$$

הרעיון: להוכיח ש- d הוא המרחק בין a, b .

הערה: במקרה כללי, $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in R$.

ובן המרחק שלהם הוא 1 (אולי).

אם המרחק הוא 1, אז המרחק הוא 1 (אולי).

שם, נניח $R[x]$ הוא המרחב הווקטורי של פולינומים מעל R .
 נניח $R[x]$ הוא המרחב הווקטורי של פולינומים מעל R .
 נניח $R[x]$ הוא המרחב הווקטורי של פולינומים מעל R .

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_i \in R$$

שם, $f \neq 0$, נניח f הוא פולינום מעל R .
 נניח f הוא פולינום מעל R .

שם, נניח f הוא פולינום מעל R .
 נניח f הוא פולינום מעל R .

$$f(x) = c_f \cdot \varphi(x)$$

שם, $f(x) \in R[x]$, ונניח $\varphi(x)$ הוא פולינום מעל R .
 נניח $f(x) \in R[x]$, ונניח $\varphi(x)$ הוא פולינום מעל R .

נניח $f(x) \in R[x]$, ונניח $\varphi(x)$ הוא פולינום מעל R .
 נניח $f(x) \in R[x]$, ונניח $\varphi(x)$ הוא פולינום מעל R .

: (01142) 6200

מכפלה של $\overline{\text{פוליונים}}$ פרימיטיב
כ־ REJ היא פוליונים פרימיטיב.

פירוש:

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r$: 1/1
 $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_s x^s$
 $a_r, b_s \neq 0$
 פונקציות f, g

וְיִהְיֶה, בְּשִׁלְתָּהּ, כִּי קָיִים אִיבָר אֶל-פִּיךָ פ
הַמֶּלֶךְ אֶל פֶּלַע עֲזָרָה יִתְחַפֵּה.

ז"ל ע ר דב מתקן כ ב מתקן f
 ק"ם א' צקס מ'נ'ת' i ק' e Pka
 כ'א'ת' אונקן , ק"ם f מ'נ'ת' ק' e Pkbj

$f(x)g(x) \approx x^{1/2} \in \mathcal{O}(x^{1/2})$

$$C = \overbrace{a_0 \cdot b_{i+j} + a_1 \cdot b_{i+j-1} + \dots + a_{i-1} \cdot b_j}^I + \underbrace{a_i \cdot b_j}_{II} + \overbrace{a_{i+1} \cdot b_{j-1} + \dots + a_{i+j} \cdot b_0}^{III}$$

($k > r$ then $a_k = 0$, $k > s$ then $b_k = 0$)

$P \times I \subset$, $\sigma \sigma \sigma$, $\sigma \sigma$: $\sigma \sigma$
 $P \times II$, $P \times III$, $\sigma \sigma$, $P \times I$: $\sigma \sigma$

$0 \leq i \leq a_i - 1$ ואם $place_{i,j-1} = p$ אז
 $0 \leq j \leq j-1$ אם $place_{i,j-1} = b_i$ p

ה"ח. העברת איפוס, קבלו

$$C - I - III = II$$

$p \mid a, b; \quad p \nmid 1$

P האנלי (תחום פיקר יחידה), ולכן P/a ו P/b

המסדה