

0. $\mathbb{Q}$ is a subfield of $\mathbb{R}$.

12/03/2012

ד"ר

W2D2

R is a ring. F is a field, $R \subseteq F$.
 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. R is a subring of $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ is a subring of $\mathbb{R}$.
 $a \in \mathbb{Q} \implies \forall a \in \mathbb{R}$

$a^{-1} \in \mathbb{Q} \implies \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \implies \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

$$L = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \}$$

$\mathbb{Q} \subseteq L$

Proof:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \in L$$

since $\mathbb{R}$ is a field

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} \in L$$

(1.2)

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \in L$$

(1.3)

$$b \neq 0, \frac{a}{b} \neq 0 \iff a \neq 0 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \in L$$

(1.4)

המשפט: R היא תורת שקילות

$$\mathcal{L} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \}$$

הקשר $\sim$ על $\mathcal{L}$ נגדף כדלקמן:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right) \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$$

נראה כי $\sim$ היא תורת שקילות

נבדוק את תכונות השקילות:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \text{ ו- } (a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$$

$$(1) \quad a_1 b_2 = a_2 b_1$$

$$(2) \quad a_2 b_3 = a_3 b_2$$

$$(1) \quad a_1 b_2 b_3 = a_2 b_1 b_3$$

$$(2) \quad a_2 b_3 b_1 = a_3 b_2 b_1$$

$$\Rightarrow a_1 b_2 b_3 = a_3 b_2 b_1$$

$$b_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) = 0$$

אם $b_2 = 0$, אז $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot 0 = a_2 \cdot b_1$

$$a_1 \cdot 0 = a_2 b_1$$

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \text{ נכונה}$$

אם $b_2 \neq 0$, אז $a_1 b_3 = a_3 b_1$

$$(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$$

$$Q = \{ [a, b] \mid a \in \mathbb{R}, b \neq 0 \}$$

הקשר $\sim$ על Q נגדף כדלקמן:

$$[a_1, b_1] \sim [a_2, b_2] \Leftrightarrow [a_1 b_2, b_1 b_2] \quad (1)$$

$$[a_1, b_1] \sim [a_2, b_2] \Leftrightarrow [a_1 a_2, b_1 b_2] \quad (2)$$

(רבי) שמשל והיחס (א) צריך:

$$(1) \quad (a_1, b) \sim (a'_1, b'_1) \quad (1') \\ (a_2, b) \sim (a'_2, b'_1)$$

$$(2) \quad (a_1 + a_2, b) \sim (a'_1 + a'_2, b'_1)$$

כאשר:

$$b'_1 = (a'_1 + a'_2) \cdot b'_1 = (a_1 + a_2) \cdot b$$

כאשר:

$$(a_1 + a_2) \cdot b = a_1 \cdot b + a_2 \cdot b = a'_1 \cdot b'_1 + a'_2 \cdot b'_1 = (a'_1 + a'_2) \cdot b'_1$$

התוצאה. כל עוד מסתכן אחד.

כאשר קורה.

הכחול - שדבריו מקיפה
אמצעים - קוואלכיו - דיסליבולכיו

$$[a, b] = [0, 1] \quad \text{אשר ילד אחר:} \\ [a, b] = [0, 1] + [a, 0] = [0, 1] + [a, b] - [0, b]$$

$$-[a, b] = [-a, b] \quad \text{(לפי אחר:)}$$

$$[a, b] + [-a, b] = [ab - ab, bb] = [0, b^2] = [0, 1]$$

$$[1, 1] \quad \text{אשר יחד אחר:}$$

$$[a, b] + [1, 1] = [a+1, b+1] \quad \text{אשר:}$$

$$[a, b] + [1, 1] = [a+1, b+1] \quad \text{אשר:}$$

$$i: R \rightarrow Q \quad : 2.32)$$

$$i(a) = [a, 1]$$

$$: (2) \cap R \quad \text{im} \quad \text{im} \quad i$$

$$i(a_1 + a_2) = [a_1 + a_2, 1] = [a_1, 1] + [a_2, 1] = i(a_1) + i(a_2)$$

$$i(a_1 a_2) = [a_1 a_2, 1] = [a_1, 1][a_2, 1] = i(a_1) \cdot i(a_2)$$

$$\ker(i) = \{a \in R \mid i(a) = 0\} = \{a \in R \mid [a, 1] = [0, 1]\} \\ = \{a \in R \mid a = 0\} = \{0\}$$

$$i(R) \cong R \quad \text{isomorphism}$$

$$i(R) \cong R \quad \text{isomorphism}$$

$$Q = \left\{ \frac{i(a)}{i(b)} \mid \begin{matrix} a, b \in R \\ b \neq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ [a, 1][b, 1]^{-1} \mid \begin{matrix} a, b \in R \\ b \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \{ [a, 1][1, b] \} = \{ [a, b] \}$$

$$\text{isomorphism between } Q \text{ and } R$$

$$R \cong Q$$

$$R \cong Q \quad \text{isomorphism}$$

נתון: R תחום המספרים הממשיים
 K שדה מספרים
 $f: R \rightarrow K$ פונקציה

נגדיר פונקציה $\bar{f}: R \rightarrow K$ על ידי:

$$\begin{array}{ccc}
 f: R & \hookrightarrow & K \\
 \downarrow i & & \uparrow \bar{f} \\
 & Q &
 \end{array}$$

$$\forall a \in R: \bar{f}(i(a)) = f(a)$$

נבדוק: $\bar{f}\left(\frac{i(a)}{i(b)}\right) = \frac{f(a)}{f(b)} \in K$

נגדיר $\bar{f}$ על ידי:

11/12/13

Q : מה המינימום , $R = \mathbb{Z}$ (1)

$f(x)$ $g(x)$ מה המינימום , $R = F[x]$ (2)
 המינימום המשותף

2 חוקי סטור

R - חוק קומוטציה עם n חברים
 $R[x_1, \dots, x_n]$ - חוק סטור במערכת
 עם n משתנים

סטור :

$$\sum_{0 \leq i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} \cdot x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

דוגמה :

$$x_1^3 x_2 + x_2^2 x_3 x_4^3 - 5x_1 x_2^2 x_3$$