

W1D4

07/03

הרצאה

י. R זוג.

I=0, R אידלים לריואלים:

3 זוגות / נוסח:

R = F[X] מכל הפולנומים ב-X מכל F.

י. $0 \neq I \subset R$ י. $f(x) \in I$ כל פולינום מכל F.י. $f(x) \in I$ (ראה כי $f(x) | f(x)$).

(חוק עם סדרה:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

וכן $\deg r(x) < \deg g(x)$ או $r(x) = 0$.

$$r(x) = (f(x) - \underbrace{g(x) \cdot q(x)}_{\in I}) \in I$$

(המשפט)

זמן, I אידל, וכן $r(x) = I$ מתקנה כל פולינום.

$$f(x) = g(x) \cdot q(x)$$

$$f(x) | g(x)$$

$$f(x) \in R \cdot g(x)$$

$$I \subseteq R \cdot g(x), \text{ כיון } I \text{ אידל, } I \subseteq R \cdot g(x)$$

$$I = R \cdot g(x)$$

- כל זוג כלשהו R קומוטטי, כל $a \in R$ מרכזים: $R \cdot a$ הוא אידל

- אידל כלשהו - אידל כלשהו (יכול להיות אידל 1)

- מכל קומוטטי כלשהו מרכזים כלשהם (קרי

מכל רצף: פולנומים, אידל)

7. $F[x]$ חוליה מסתירה

- י"כ $I \subset R$ אידיאל

חבורה המנה R/I : כיתוס מחבורה

כל מכנה מחלקה מחבורה $a+I$

$$(a+I)(b+I) = ab+I \quad (2.7)$$

נראה שכל מוצר חלש:

$$b+I = b'+I, \quad a+I = a'+I$$

$$b' = b + d, \quad a' = a + c, \quad d, c \in I$$

$$a'b'+I = (a+c)(b+d)+I = ab+ad+cb+cd+I =$$

$$= ab+I \quad \checkmark$$

- כיתוס זכר כל מקרים:

R/I כיתוס חבורה זכר וזכר קטן.

למשל: $(a+I)(b+I) = (a+I)(b+c+I) =$

$$= (a+I)(b+c+I) = a(b+c)+I = ab+ac+I = (ab+I) + (ac+I) =$$

$$= (a+I)(b+I) + (a+I)(c+I)$$

הומומורפיזם הנאיב:

$$v: R \rightarrow R/I$$

$$v(x) = x + I$$

מש

הוא הומומורפיזם של חוגים:

$$v(x \cdot y) = x \cdot y + I = (x + I)(y + I) = v(x) \cdot v(y)$$

$$\text{Ker } v = I$$

התכלית

אידיאל הוא ~~התכלית~~ חבורה נורמלית - עבור חוגים.
משפט ההומומורפיזם נותן תמונה עובדים חוגים:

1. $f: R_1 \rightarrow R_2$ חוגים

$$\bar{f}: R_1 / \text{Ker } f \cong \text{Im } f$$

$$\bar{f}(x + \text{Ker } f) = f(x)$$

- זה יחיד עבור חבורה חבורה

נראה ש $\bar{f}$ שומר על כפל:

$$\bar{f}((x + \text{Ker } f)(y + \text{Ker } f)) = \bar{f}(xy + \text{Ker } f) =$$

$$= f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(x + \text{Ker } f) \cdot \bar{f}(y + \text{Ker } f)$$

2. נקבע סטל: $I \subset R$ חוג

הנאיב: $v: R \rightarrow R/I$ חוגים

חוג $S \subset R$ חוג $R \mid e$ חוק

$$f = v|_S$$

$$f: S \rightarrow R/I$$

$$\text{Ker } f = S \cap \text{Ker } v = S \cap I$$

$$S/S \cap I \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Im } f \quad : (1) - v$$

$$\text{Im } f = \{ v(s) \mid s \in S \} = \{ s \cdot I \mid s \in S \} =$$

$$= \{ s + j \cdot I \mid \substack{s \in S \\ j \in I} \} = \frac{S + I}{I}$$

$$: \text{isomorphism}$$

$$\boxed{S/S \cap I \xrightarrow{\tilde{f}} \frac{S + I}{I}}$$

$$s + S \cap I \mapsto s + I$$

isomorphism

$$f: R_1 \rightarrow R_2 \quad (1) \quad 3$$

הוא R_2 וזוהי

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

$$\{ \text{Ker } f \subset S \subset R_1 \} \leftrightarrow \{ L \subset \text{Im } f \}$$

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

$$S \mapsto f(S)$$

$$f^{-1}(L) \leftarrow L$$

$$\text{Ker } f \subset I \subset S \quad S/I \cong \frac{f(S)}{f(I)}$$

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

$$\text{Ker } f \subset S \subset R$$

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

$$f(y) \cdot f(x) = f(y \cdot x) \in f(I)$$

הה R_1 וזוהי R_2 וזוהי R_1

$$y \in R_1 \quad \text{---} \quad x \in f^{-1}(L) \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \in L \quad \Rightarrow \quad xy \in f^{-1}(L)$$

$$\text{Ker } f \subset I \subset S \subset R \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

$$f(I) \subset f(S) \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

$$S/I \cong f(S)/f(I)$$

$$I \subset R \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

$$I = \text{Ker } V, \quad V: R \rightarrow R/I$$

$$S/I \cong R/I \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

$$I \subset S \subset R \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

$$I \subset J \subset R \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

$$S/I \cong S/J \quad \text{---} \quad \text{זכור}$$

13/2/2019

מילד
אז $I = \mathbb{Z} \cdot m = m \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ (1)

הוא זוגי, כלומר
אברהם. וזו היתה
כיום חסר המספר
ממילא

$$\mathbb{Z} / m \mathbb{Z} := \mathbb{Z}_m$$

הכל $\mathbb{Z}_m \hookrightarrow \mathbb{Z}$

$$I = R \cdot x^2, \quad R = F[x] \quad (2)$$

$$R/I = \frac{F[x]}{F[x] \cdot x^2}$$

המקום של המספרים

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + F[x] \cdot x^2 =$$

$$= a_0 + a_1 x + F[x] \cdot x^2$$

$$a_0 + a_1 x + I$$

המקום, כל המספרים

הם מוגדרים:

$$(a_0 + a_1 x + I) + (b_0 + b_1 x + I) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + I$$

וכן הוכח:

$$(a_0 + a_1 x + I) \cdot (b_0 + b_1 x + I) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + I$$

$$1 = I$$

אשר הוכח:

הצגה : $\mathbb{R}$

$$(a+bx+I)(c+dx+I) = 1+I$$

$$ac + (ad+bc)x + I = 1+I$$

$$(ac-1) + (ad+bc)x \in F[x] \cdot X^2$$

$$ac-1 + (ad+bc)x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac=1, \Leftrightarrow a \neq 0, c = \frac{1}{a} \\ ad+bc=0 \Rightarrow d = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

אם $a \neq 0$ אז I הוא איבר הפי, כי $a+I$ הפי, $a=0$ אז $b \neq 0$ אז $b+I$ הפי, $a=0$ אז $b, c \in F$ אז $(b+I)(c+I) = 0+I$

הצגה : $\mathbb{R}$ של M ו- R

$$I \subset R$$

אם $I=R$ אז I הוא איבר הפי, כי $a \in I$ אז $a^{-1} \in R$

$$I \ni a \cdot a^{-1} = 1$$

$$x = \frac{1}{I} \cdot x \in I, x \in R$$

$$R \subset I \subset R$$

$$R=I$$

הצגה : $\mathbb{R}$ של M ו- R
אם $a \in I$ אז $a^{-1} \in R$

R/I $\cong$ R/I $\cong$ R/I

$I \subseteq J \subseteq R$ $\Leftrightarrow$ $I \subseteq J$ $\Leftrightarrow$ $I \subseteq J$

I $\subseteq$ R $\Leftrightarrow$ $I \subseteq R$

R $\cong$ R $\Leftrightarrow$ $R \cong R$

R $\cong$ R $\Leftrightarrow$ $R \cong R$

(R/I)

R/I

R/I

R $\cong$ R $\Leftrightarrow$ $R \cong R$

R $\cong$ R $\Leftrightarrow$ $R \cong R$

$I = R \cdot a$ $\Leftrightarrow$ $I = R \cdot a$

I $\subseteq$ R $\Leftrightarrow$ $I \subseteq R$

$I \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $I \neq 0$

$I = R$ $\Leftrightarrow$ $I = R$

$R \cdot a = R$ $\Leftrightarrow$ $R \cdot a = R$

$1 \in R \cdot a$ $\Leftrightarrow$ $1 \in R \cdot a$

$b \cdot a = 1$ $\Leftrightarrow$ $b \cdot a = 1$

a $\Leftrightarrow$ a

R/I

מסקנה: R הוא קומוטטיב, I אידיאל, $I \subseteq R$ אידיאל.

R/I שדה $\Leftrightarrow I$ אידיאל מקסימלי

המשפט

נניח R אידיאל מקסימלי, I אידיאל, $I \subseteq R$ אידיאל, $I \neq R$ אידיאל, $I \neq \{0\}$ אידיאל.

$I = R \cdot f$ אידיאל, $I \subseteq R$ אידיאל, $I \neq R$ אידיאל, $I \neq \{0\}$ אידיאל.

אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי.

אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי.

אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי. אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי. אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי.

מסקנה: I אידיאל מקסימלי, $I \subseteq R$ אידיאל, $I \neq R$ אידיאל, $I \neq \{0\}$ אידיאל.

אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי.

אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי.

אם R/I שדה, אז I אידיאל מקסימלי.

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ שדה, p ראשוני.