

פרק א': חוגים

228 עמוד:

(Ring) חוג הוא קבוצה R עם מבנה

כאילו:

כפל חיבור +

יחס - כפל

כך $(R, +)$ חבורה חלופה

עם אבר יחיד / חיבור 0

וכן שטוף הפעל הוא

אסוציאטיבי

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

אם הפעל חלופי, נאמר ש R חוג חלופי

אם יש זכר אבר יחיד, אז

נניח אנו כי 1 ונאמר כי R חוג

חוג עם יחידה

213 עמוד:

(1) $\mathbb{Z}$

(2) $F[x]$ חוג הפולינומים במשתנה x

מא F שדה

(3) $M_n(F)$ - מטריצה $n \times n$ מעל F שדה

(חוג לא חלופי, עם יחידה)

(4) F שדה הוא שדה חסר חסר יחידה

(הקוסיק, לא אבר 0 יחס כחם / כח)

הוכחה :

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \quad R \text{ זוגי}$$

הוכחה :

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0$$

$$0 = a \cdot 0$$



$a, b \neq 0$, R זוגי

$$a \cdot b = 0 \quad e \quad p$$

$M_{2 \times 2}(R)$: R זוגי

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכחה :

R זוגי

R זוגי

$$a + \dots + a := na$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$(-a) + \dots + (-a) := (-n)a = n \cdot (-a) = -(na)$$

$$0 \in \mathbb{Z} \quad 0 \cdot a := 0 \quad 0 \in R$$

הוכחה :

$b, a \in R$, n, m זוגי

$$(n+m) \cdot a = na + ma$$

$$n(a+b) = na + nb$$

הערה חשובה: $a \in R$, n שלם

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$$

n, m שלמים:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$$

הצגה הומומורפיזם

R_1, R_2 שני חוגים
 $f: R_1 \rightarrow R_2$ פונקציה
 תהיה הומומורפיזם חוגים אם:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{וכן}$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

כל $x, y \in R_1$

כלומר f כשנחיל עליו מבנה חוגים - ימשיך להיות חוג

$$\text{Ker } f = \{ x \in R_1 \mid f(x) = 0 \}$$

- כל חומר חבורה חבורה חבורה R_1
 - $\text{Ker } f$ חבורה חבורה חבורה
 כלומר R_1

$x \in \ker f$, $a \in R$ "ד" "ד"ד

$$x \in \ker f \quad : (13)$$

$$f(ax) = f(a) \cdot f(x) = f(a) \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

ה'תשנ"ג

י"ח R חזו.

M - חזו I C R יקרא

R אים I חזו חזו חזו חזו

(כס) ענין (ה'תשנ"ג)