

סדרה 10

הגדרה: הרחבה של K מ F נקרא פשוטה אם $\exists \alpha \in K, K = F(\alpha) = F[\alpha]$ משל:

תהי K הרחבה של F , ונניח $K = F(a_1, \dots, a_n)$ כאשר $a_1, \dots, a_{n-1}$ סגורים מ F וכן a_n אלגברי מ F .

למשל, K הרחבה של F (הטלה) F קיים $\alpha \in K$ כן $K = F(\alpha)$

הוכחה:

אם F סגור סופי, אז גם K סגור סופי, ואם K^* ציקל. ונניח כי K^* נוצר מ β , $K = F(\beta)$ למשל:

- ונניח F סגור אינסופי.

ואז K כאינסוקציה מ F $2 \leq n$.

2.1: a_1 סגור מ F , a_2 אלגברי מ F .

תהי $f_1(x), f_2(x) \in F[x]$

הפולינומים הא-פרימיטיביים של a_1, a_2 מ F .

תהי R שדה סגור של $f_1(x) \cdot f_2(x)$ מ F .

(משל) R $a_1 = a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,s_1} \in R$ $a_2 = a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,s_2} \in R$

$a_1 = a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,s_1}$ $a_2 = a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,s_2}$

(למשל) $\frac{a_{2,i} - a_{2,j}}{a_{1,k} - a_{1,m}} \in R$ $1 \leq i, j \leq s_2$ $1 \leq k, m \leq s_1$

כיון ש- F אינסופי, $\exists c \in F$ השתלשול

האזכרה הנ"ל (מכאן האזכרה הנ"ל השתלשול) (F)

$b = a_1 + c \cdot a_2$ 2.2:

$K = F(a_1, a_2) = F(b)$ הוא K

$$a_2 = b - ca_1$$

(כאן) -

$$g(x) := f_2(b - cx) \in F(b)[x] \text{ (גורם } f_2 \text{ ב-} F(b) \text{)}$$

$$g(a_1) = f_2(b - ca_1) = f_2(a_2) = 0$$

g רצף על a_1 ←

$$\Rightarrow x - a_1 \mid g(x)$$

$$f_1(a_1) = 0 \Rightarrow x - a_1 \mid f_1(x)$$

$$\Rightarrow x - a_1 \mid \gcd(f_1(x), g(x)) \in F(b)[x]$$

$$\gcd(f_1(x), g(x)) = x - a_1 \quad (\text{כאן}) -$$

$a_1, a_2 \in F(b)$ → פולי

$$g(x) = f_2(b - cx) = \prod_{j=1}^{s_2} ((b - cx) - a_{2j}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{s_2} (a_2 - ca_1 - cx - a_{2j}) = (-c)^{s_2} \prod_{j=1}^{s_2} (x - a_1 - c^{-1}(a_2 - a_{2j}))$$

(כאן) - $x - a_1$ רצף על F המרחב. כל $x - a_1$ פולי

(מרחב $x - a_1$ פולי) $f_1(x)$ רצף על F המרחב

$$(f_1(x) = \prod_{i=1}^{s_1} (x - a_{1i}))$$

$$x - a_1 - c^{-1}(-a_{2j} + a_2) = x - a_{1i}$$

רצף

שכ

$$a_{1i} - a_1 = -c^{-1}(a_{2j} - a_2)$$

ל

$$c = \frac{a_{2,1} - a_{2j}}{a_{1,i} - a_1}$$

c מרחב F המרחב

$$a_2 \in F(b) \Leftarrow a_2 = b - c \cdot a_1, \quad a_1 \in F(b) \quad (\text{כאן})$$

$F(a_1, a_2) \subset F(b) \subset F(a_1, a_2)$ כל $F(b)$ פולי פולי $F(b)$ שכ

: 27110/2

$$K = F(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_{n-2})(a_{n-1}, a_n) =$$

$$= F(a_1, \dots, a_{n-2}) (b_n) = F(a_1, \dots, a_{n-3}) (a_{n-2}, b_n) =$$

האזנה 2

$$= \dots = F(a_1, b_2) = F(b_1)$$

- (רמק) בתרומה פאליה $K = F(\omega)$ על F

• (F $\rightarrow$ N $\rightarrow$ α)

$F \quad |e| \quad \bar{F} \quad 1120 \quad 827$

ע' שפון

$$F \text{ von } K \hookrightarrow \bar{F}$$

על עמך שכן פלג נחם?

$F_{\text{כח}} \propto \text{הפרש-הגובה}$ ρ ו- g קבועים

$$F_{K,N}, \bar{F} \rightarrow \rho(\alpha) \in \beta \text{ over } \mathbb{S}^5$$

3A41 3A16 10'e

$$\sigma: F(\alpha) \hookrightarrow \bar{F}$$

$$\sigma\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta^i$$

$$\left(\begin{array}{l} n = \deg(p(x)) \\ a_i \in F \end{array} \right)$$
$$G_{H/F} = \frac{\text{system } G}{F_{HN} \cdot F_{-2} \cdot e \cdot e} \text{ BHP}$$

$$|G_{K/F}| = \frac{\text{order of } G}{\text{order of } K} \leq n = \deg p(x)$$

$$|G_{F(\alpha)/F}| \leq [F(\alpha) : F]$$

• $F_{\text{av}} \cdot r_{\text{av}} \propto \Rightarrow \text{pile c'}$

אסטרטגיה:

לספק: יהי R שדה המרחב של F .

נניח כי $\alpha \in R$ אלמנט מרכזי של F .

נניח:

$$|G_{F(\alpha)/F}| \leq [F(\alpha):F]$$

אם α אינו סב-בנייני של F אז $F(\alpha) = F$.

נניח: יהי K שדה המרחב הממשי של F .

הנניח: F סב-בנייני של K .

TFAE

(1) K סב-בנייני של F .

(2) K נוצר מ- F על ידי קבלת סופי α .

אז F סב-בנייני של K .

(3) K נוצר מ- F על ידי קבלת סופי α ו- β .

(4) $|G_{K/F}| = [K:F]$ $\iff$ $G_{K/F}$ סופי ושיקוף

הוכחה:

(1) $\iff$ (2): נניח כי K סב-בנייני של F . אז $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ ו- $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K$.

אז K סב-בנייני של F .

נניח: $K = \text{Span}_F \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$

אז $K = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

(3) $\iff$ (4): נניח כי $K = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ו- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ סב-בנייני של F .

(2) $\iff$ (3): נניח כי $K = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ו- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ סב-בנייני של F .

נניח: K סב-בנייני של F .

אז $K = F$.

הוכחה:

$|G_{F(\alpha)/F}| = [F(\alpha):F]$

הוכחה:

$T: G_{K/F} \rightarrow G_{F(\alpha)/F}$

הוכחה:

$T(g) = \sigma|_{F(\alpha)}$

$$F \text{ fin } \mathbb{Z}: F(a_n) \subset \bar{F} \text{ etc. } \cap \text{ of } \text{all } T$$

56 תמונת ציור ל יא יחידה 1971

$$F \text{ AN} \quad G: K C, \bar{F}$$

$T(6) = 2$: W/L

1/NO La GF(u) -J

$$G_F = \left\{ G \in G_{H/F} \mid G|_{F(\alpha)} = I \right\}$$

$\bar{F}$ הוא גזע רגיל, $F(a_1)$ שם הפונקציה, τ זמן

$$|t \cdot 1_F = \tau(t) \quad , \quad t \in F)$$

איברי G_T הם סגור בסביבתו של $K \subset F$ וכן $F = K(\bar{F})$

γ_N $F(x_1)$ f_{YN} $\bar{F}$ γ K $\bar{G}$ G μ_N

$$\sigma'(bu) = b \cdot \sigma(u) = \tau(b) \sigma(ue) \quad \begin{matrix} b \in F(a_1) \\ u \in U \end{matrix}$$

Ans. $G(b) = \tau(b)$ $b \in f(a)$ -s jst

$$n-1, (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \quad K = F(a_1)(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

אברהם, פרנק, $F(q_1)$ שיל, 23/12/20

$$: \text{say, } F(a_1) \quad \text{for } F(200) \text{ to } 6 \text{ to } 200 \quad U = F(a_1, b)$$

$$|G_U| = |G U / F(a_1)| = |G \cancel{F(a_1)(b)}_{F(a_1)}| = [F(a_1)(b) : F(a_1)] = [k : F(G_1)]$$

$$|G_{U/F}| = |G_{F(a_1)/F}| |G_U| = [F(a_1):F] [U:F(a_1)] = [U:F]$$

ק"ל אל מלך מלכות ישראל ואל מלך מלכות ישראל

$\omega \in U = F(\omega)$, ω קרוי

$F_{KN} = 10000 \text{ N}$

היה $b \in K$ E $\supset$ K $\Rightarrow$ (1)

היה F $\supset$ K $\Rightarrow$ (2)

F $\supset$ K $\Rightarrow$ (3)

$$K = F(b, a_1, \dots, a_n)$$

היה K $\supset$ F

$$F_0 = F(b) \subset F_1 = F(b, a_1) \subset \dots \subset F_n = F(b, a_1, \dots, a_n)$$

$$|G_{F_0/F}| \leq [F_0 : F] \iff F \text{ $\supset$ } K \text{ $\Rightarrow$ } b$$

$$G_j = G_{F_j/F}$$

$$G_j : G_{F_j/F} \text{ $\supset$ } G_{F_{j-1}/F}$$

$$G_{j-1} = \{ \sigma \in G_j \mid \sigma|_{F_{j-1}} = \text{id} \}$$

$$|G_{j-1}| \leq [F_j : F_{j-1}]$$

$$|G_j| \leq [F_j : F_{j-1}] \cdot |G_{j-1}| \leq$$

$$\leq [F_j : F_{j-1}] \cdot [F_{j-1} : F_{j-2}] \cdot |G_{j-2}| \leq$$

$$= |G_{F_0/F}|$$

$$\leq \dots \leq [F_j : F_{j-1}] \cdot \dots \cdot [F_1 : F_0] |G_0|$$

$$[F_j : F_{j-1}] \cdot \dots \cdot [F_1 : F_0] \cdot [F_0 : F] = [F_j : F]$$

היה K $\supset$ F

$j = n$

היה K $\supset$ F

$$|G_{K/F}| = |G_n| \leq [K : F]$$

היה K $\supset$ F $\Rightarrow$ K $\supset$ F

QED

מסקנה:

נניח כי F שדה מספרים

(נניח: $\text{char}(F) = p$, או $\text{char}(F) = 0$ ו- $F^p \subsetneq F$)

אז, כל הרחבה אלגברית של F היא

היא סגורה וכן $G_{K/F}$ (3).

כלומר, שג"ח:

$$|G_{K/F}| = [K:F]$$

מסקנה: נניח K הרחבה אלגברית של F וסגורה.

$$K_s^F = \{a \in K \mid a \text{ סגור תחת } F\}$$

אז, K_s^F היא שדה חלקי של K .

הוכחה:

נניח כי $a, b \in K_s^F$. נראה כי $F(a, b)$

היא סגורה. וכן מכאן נקודת כל אחד $F(a, b)$

סגורה, ולכן ההרחבה $F(a, b)$ של F סגורה.

וכן, $\frac{a}{b}$, $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ סגורים תחת F .

לכן, כלומר איננו K_s^F וכן היא שדה.

- נניח כי K הרחבה אלגברית של F .

(לד מניח: $\text{char}(F) = p$ ו- $F^p \subsetneq F$)

$$K \not\subseteq K_s^F$$

נניח כי $a \in K \setminus K_s^F$. יהי $f(x)$ המינימום

הא-מינימום של a על F . $f(x)$ איננו שייך ל- F .

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$f(x) \in F[x] \quad (a_i \in F)$$

אז, $f(x)$ אינו סגור, $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ (כל)

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{אז} \quad f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$h \in F[x]$ $h(x^{p^e})$ $a^{p^e} \in K_S^F$

$a^{p^e} \in K_S^F$ e p^e

$$(x-a)^{p^e} = x^{p^e} - a^{p^e} \in K_S^F[x]$$

K_S^F $r = p^e$ $(x-a)^r$ $r = p^e$

$$(x-a)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-a)^j x^{r-j} \in K_S^F[x]$$

K_S^F $r=0$ $r = p^e \cdot r'$ $r' \cdot a^{p^e}$

$$(x-a)^r = ((x-a)^{p^e})^{r'} = (x^{p^e} - a^{p^e})^{r'}$$

$$= \sum_{j=0}^{r'} \binom{r'}{j} (-a^{p^e})^j (x^{p^e})^{r'-j} \in K_S^F[x]$$

$-r' \cdot a^{p^e}$ $r' \cdot a^{p^e}$

$r' \cdot a^{p^e} \in K_S^F$ $r' \cdot a^{p^e} \in K_S^F$

$\square$