

אנסי' יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום.

אנסי' $\alpha \in F$ יהי α שורש מרובע בסדר

הרעבה מרובע $(f(x), f'(x))$ הוא מחלק חזק.

הוכחה:

נניח F כח K שבה הרעבה $\alpha \in F$ שורש

$f(x)$. α כן $[K(x):K] = 2$ חזקה

$$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x) \quad g(x) \in K[x]$$

$$f'(x) = 2(x-\alpha)g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x) \Rightarrow (x-\alpha) \mid f'(x)$$

$$\Rightarrow (x-\alpha) \mid (f(x), f'(x))$$

$\Leftarrow$ הנהיה α מחלק חזק.

לעברת נניח $(f(x), f'(x)) = (x-\alpha)^2 g(x)$ חזקה

יהי $\alpha \in F$ שבה α שורש $f(x)$.

נניח $\alpha \in F$ שבה α שורש $f(x)$.

$$(x-\alpha) \mid f(x), f'(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = (x-\alpha)^2 g(x) \\ f'(x) = (x-\alpha)^2 h(x) \end{cases}$$

חזק

$$f'(x) = 2(x-\alpha)g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x)$$

$$f'(\alpha) = 0 = g(\alpha)$$

$$\Rightarrow (x-\alpha) \mid g(x)$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 \mid f(x)$$

$\Leftarrow$ $\alpha \in F$ שורש מרובע $f(x)$.

א' - פ'י' $f(x) \in F[x]$ פולנום

האם יתכן $\mathbb{C}$ - $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$ שיהיה גורם חסר?

להקצה $\Rightarrow \gcd(f(x), f'(x))$ חסר

ד'ס'ן, $\mathbb{C}$ - $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$ קטע F

$$\gcd(f(x), f'(x)) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \mid f'(x) \quad \text{ולן}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \text{ולן}$$

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \geq 1, a_i = 0$$

זה יתכן כן כאשר $\text{char}(F) = p$ (הואילוי)

$$p \mid i \Leftrightarrow a_i \neq 0 \quad \text{ולן}$$

$$f(x) = g(x^p)$$

$$g(x) \in F[x] \quad \text{כאשר}$$

המשפט:

(1) פולנום $f(x) \in F[x]$ ללא קבוצת יקטיו

סדרתית (פ'ר'י'ז) אם $\mathbb{C}$ אורטו (אס'ר'ר'ז)

הם סגורים $(\Rightarrow \gcd(f(x), f'(x)) = 1)$

(2) י'ר' F כ' K היחידה $\mathbb{Q}$ F

אז K שיהיה אלגבר מ' F , יקטיו סדרתית

מ' F , אם הפולנום הוא-פ'י'ר $\mathbb{Q}$ α מ' F

סדרתית.

(3) הרחבה אלגבר F כ' K יקטיו סדרתית

אם $\mathbb{Q}$ אברה K סדרתית מ' F .

(ט, ט')

(4) $\mathbb{Q}$ כ' $\mathbb{C}$ - $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$ חסר

$$\text{char}(F) = 0 \quad \text{כאשר}$$

נניח כי F שדה סופי.

כיוון ש- F שדה סופי, נאמר כי $|F| = p^n$.

לכן, $\text{char}(F) = p$; p ראשוני.

נאמר כי $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow F$ כשכך $\mathbb{Z}_p$ שדה.

$$n \cdot 1_F \mapsto n \cdot 1_{\mathbb{Z}_p}$$

לכן, F שדה סופי, $\mathbb{Z}_p$ שדה.

$$[F : \mathbb{Z}_p] = n$$

ואכן, $F \cong \mathbb{Z}_p^n$, $\mathbb{Z}_p$ שדה.

$$\Rightarrow |F| = p^n$$

$$|F^*| = p^n - 1$$

ואכן, $\forall a \in F^* \quad a^{p^n-1} = 1$

$$\forall a \in F \Rightarrow a^{p^n} - a = 0$$

לכן, אברי F הם כלם שורשי $x^{p^n} - x$.

כיוון ש- F שדה סופי, p^n הוא כדור קדוש.

כל שורשי $x^{p^n} - x$ הם ב- F , F שדה.

הפולינום $x^{p^n} - x$ הוא $\mathbb{Z}_p$.

משפט: יהי p מספר ראשוני. לכל n שדה.

קיים שדה F עם $|F| = p^n$ אוטומורפיזם $\mathbb{Z}_p$.

ממילא, $\mathbb{Z}_p$ שדה, F שדה.

כל שורשי $x^{p^n} - x$ הם ב- $\mathbb{Z}_p$.

כל שורשי $x^{p^n} - x$ הם ב- $\mathbb{Z}_p$ (כל שורשי $x^{p^n} - x$ הם ב- $\mathbb{Z}_p$).

הוכחה: נניח שהפולינום $x^{p^n} - x$ הוא $\mathbb{Z}_p$.

הוא ממילא $\mathbb{Z}_p$ (כל שורשי $x^{p^n} - x$ הם ב- $\mathbb{Z}_p$).

(כל שורשי $x^{p^n} - x$ הם ב- $\mathbb{Z}_p$).

עם קבלת 1 וכן אין צורך שיהיה שדה, ואכן שדה.

שדה F הוא $\mathbb{Z}_p$.

אשר . KNER נ"י

$$f(-u) = (-1)^{p^n} u^{p^n+u} = (-1)^p u^{u+1} = -u \text{ if } u=0 \text{ / odd } p \geq 3 \quad p \text{ odd}$$

$$= u^{u+1} = 2u = 0 \quad p=2 \quad p \text{ even}$$

$$f(u^{-1}) = (u^{-1})^{r''} \cdot u^{-1} = (u^{r''})^{-1} \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u^{-1} = 0$$

$R \supset \mathbb{Z}_p$. R חזק
 $R = F$. R חזק

$$[F: \mathbb{Z}_p] = 16 \quad \text{111}$$

$$P^n = |R| = |F| = p^n \quad 125$$

$$n = 16 \quad 125$$

1251 -

$$\text{char}(F) = 0 \quad (1) \quad \therefore \rho|_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}} \cong \rho|_{\mathbb{C}} \otimes F$$

$$F^p = F \quad |p| \text{ char}(F) = p \quad (2)$$

$$\forall a \in F \exists b \in F, b^p = a$$

אלבין מבע F : 316, מבע F 'ה' : 620

מכאן נובע כי F הוא פונקציה

(3) $\chi_1 \in \mathcal{H}_1$ is $\chi_1(F) = 0$ and $\chi_1 \neq 0$

merk: $\text{char}(F) = p$ n'y'a

למשל $K \supset F$ וכן $F^p = F$ ו'א

ה. $a \in K$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta \neq 0$, $\eta \neq 1$, $\eta \neq -1$, $\eta \neq \pm i$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $a \in F$ $f(a) = 0$ $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

$$f(x) = b_0 + b_1 x^p + b_2 x^{2p} + \dots + b_n x^{np} \quad b_i \in F$$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

$$f(x) = a_0^p + a_1^p x^p + a_2^p x^{2p} + \dots + a_n^p x^{np} =$$

$$\text{char}(F) = p \Rightarrow f(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^p$$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

$$f(x) = x^p - a \quad a \in F \setminus F^p$$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

$$f(x) = x^p - a = (x - \alpha)^p \quad \alpha \in F$$

$$f(x) = x^p - \alpha^p = (x - \alpha)^p$$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

$$f(x) = x^p - \alpha^p = (x - \alpha)^p$$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

$$f(x) = x^p - \alpha^p = (x - \alpha)^p$$

הא-פריק $f(x) \in F[x]$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$ $f(x) = g(x^p)$

$$f(x) = x^p - \alpha^p = (x - \alpha)^p$$

הא-פריק

מכונה מים H -2 פא 6 ע"ב 5

F -2 קצנ' 1011 , F 16N

F[X] -2 1/11/15 130N 10N , 120

10N