

אלגברה ב' 2 – תרגול 9

16.5.11

כרקטרים

כרקטר של חבורה G הוא הומומורפיזם $\varphi: G \rightarrow K^*$, שדה. הוכחנו את משפט Artin - כרקטרים שומים הם בת"ל מעל $\tilde{K}$. הסקנו שתי מסקנות:

מסקנה. 1

עבור L/K הרחבה פרידה מעלה n ויהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ בסיס K - ונסמן $\text{Ism}_K(L/\tilde{K})\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ אז $\det(\sigma_i(\alpha_j)) \neq 0$.

מדוע זה מעניין אותנו? הריבוע של הדטרמיננטה הוא נקרא הדיסקרימיננט של הבסיס. ניתן להגדיר דיסקרימיננט לשדה הרחבה וזה משמש לאפיון מסויים של ההרחבה.

הוכחה. די להוכיח ששורות המטריצה בת"ל מעל $\tilde{K}$. נסמן, $\xi_i = (\sigma_i(\alpha_1), \dots, \sigma_i(\alpha_n))$. נניח $a_i \in \tilde{K}, \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = 0$ לכן,

$$\forall 1 \leq j \leq n \quad \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i(\alpha_j) = 0$$

נראה ש- $\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i$ זו פונקציית האפס על L ואז בגלל שהכרקטרים בת"ל - $\tilde{K}$ נקבל $a_1 = \dots = a_n = 0$ (ברור כי $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ כרקטרים שונים).
ל- $b_j \in K, L \ni a = \sum_{j=1}^n b_j \alpha_j$

$$\sum a_i \sigma_i(a) = \sum a_i \sigma_i \left(\sum b_j \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^n b_j \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i(\alpha_j)}_{=0} = 0$$

□

נורמה ועקבה

נדבר על הנורמה והעקבה. נגדיר באופן כללי יותר מאשר בשיעור. תהי L/K הרחבה סופית פרידה ויהיו $\text{Ism}_K(L, \tilde{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. ל- $a \in L$ נגדיר:

$$T_{L/K}(a) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(a)$$

$$N_{L/K}(a) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(a)$$

לא ממש ברור למה זה בכלל איברים של K . אבל לפחות היה ברור למה האיבר ב- L . כאן לא ברור אף אחד מהם. בכל זאת:

$$T_{L/K}, N_{L/K} \in K$$

זה בלי הוכחה, אבל זה מקרה פרטי של ההגדרה: $T_{L/K}$ זו העקבה של ה"ל- K $x \mapsto ax$ ($x \in L$). $N_{L/K}(a)$ זו הדטרמיננטה של ה"ל. כאן טריוויאלי מדוע זה איבר של K אבל לא ברור מדוע בשדה פריד זה יוצא הנוסחאות שלמעלה. נסמן $l(x, y) = T_{L/K}(xy)$ זו תבנית בילינארית סימטרית על L כמ"ו - K .

מסקנה. 2

ל- L/K סופית פרידה, f לא מנוונת.

הוכחה. נזכיר כי f לא מנוונת $\Leftrightarrow$ לכל $x \in L^*$ יש $x \in L^*$ כך ש- $T_{L/K}(xy) = l(x, y) \neq 0$. זה שקול לכך שיש $x_0 \in L^*$ כך ש- $T_{L/K}(x_0) \neq 0$ (כיוון אחד ברור. כעת אם יש x_0 כזה אז לכל x ניקח $y = x^{-1}x_0$ ואז $T_{L/K}(xy) = T_{L/K}(x_0) \neq 0$). נניח $T_{L/K}(x) = 0$ לכל $x \in L$ אז $\sum_{i=1}^n \sigma_i = 0$ כפונקציה על L ומאי תלות נקבל סתירה. $\square$

שאלה. תהי $K = F[\sqrt{\rho}]$, $\text{char } F \neq 2$. הרחבה ריבועית, $\rho \in F$, $\sqrt{\rho} \notin F$. מצאו את $T_{K/F}, N_{K/F}$.

תשובה. K/F גלואה, $\text{Gal}(K/F) = \{id, \tau\}$, $\tau(\sqrt{\rho}) = -\sqrt{\rho}$. ל- $x \in K$ נכתוב $x = a + b\sqrt{\rho}$, $a, b \in F$.

$$T_{K/F}(x) = (a + b\sqrt{\rho}) + \tau(a + b\sqrt{\rho})$$

$$N_{K/F}(x) = (a + b\sqrt{\rho})(a - b\sqrt{\rho}) = a^2 - b^2\rho$$

הערה. ל- x כנ"ל נכתוב את ה"ל- F המוגדרת ע"י $x \mapsto x\alpha$ כמטריצה ב- $M_2(F)$ לפי הבסיס $(1, \sqrt{\rho})$.

$$x(1) = a + b\sqrt{\rho}$$

$$x(\sqrt{\rho}) = (a + b\sqrt{\rho})\sqrt{\rho} = b\rho + a\sqrt{\rho}$$

לכן,

$$\lambda_x]_{(1, \sqrt{\rho})} = \begin{pmatrix} a & b\rho \\ b & a \end{pmatrix}$$

ואז העקבה היא $2a$ והדטרמיננטה $a^2 - b^2\rho$.

הרחבות מעגליות

L/K גלואה נקראית מעגלית אם $\text{Gal}(L/K)$ מעגלית. למשל אם $[L : K] = p$ ראשונית אז $G \cong \mathbb{Z}_p$ מעגלית. אם K_n/K הרחבה של שדה סופי K ממעלה n אז K_n/K מעגלית. יהי $\zeta \in \tilde{K}$ שורש ישיחידה פרימיטיבי מסדר n ($\zeta^n = 1, \zeta^k \neq 1, 0 < k < n$). אז ההרחבה $L = K(\zeta)$ נקראית הרחבה ציקלוטומית והראיתם $\text{Gal}(L/K) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ (שיכון). בפרט אם n ראשוני אז $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ הוא שדה ולכן אגף ימין הוא חבורה מעגלית ואז $\text{Gal}(L/K)$ מעגלית כתת חבורה של חבורה מעגלית.

משפט. יהי K שדה בעל אפיון $p < \infty$. L/K ציקלוטומית הנוצרת ע"י שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n (בפרט n אינו מתחלק ב- p) כי הוכחנו בשעיור שזה תנאי שקול לכך שיש שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n ב- $\tilde{K}$. אז L/K מעגלית.

הוכחה. נסמן $L = K(\zeta)$, ואז $\zeta \in \mu_n(\tilde{K})$ פרימיטיבי. $F_p \subseteq K$ ואז $L = KF_p(\zeta)$. $\text{Gal}(L/K) \cong \text{Gal}(F_p(\zeta)/F_p(\zeta) \cap K)$ גלואה של שדות סופיים ולכן מעגלית. $F_p(\zeta)/F_p(\zeta) \cap K$ וזו הרחבה של שדות סופיים ולכן אגף ימין זו חבורה מעגלית. וזה כי הוכחנו בשעיור שאם R/K_0 גלואה ו- F/K_0 הרחבה כלשהי כך ש- R, F מוכלים בדשה משותף אז RF/F גלואה ומתקיים $\text{Gal}(RF/F) \cong \text{Gal}(R/R \cap F)$ כאן $F_p = K_0$, $F_p(\zeta) = R$ ו- $K = F$.

□