

## אלגברה ב' 2 – תרגול 7

11.4.11

### התאמת גלואה

**שאלה.** רשמו את התאמת גלואה עבור  $K = [\sqrt[4]{7}, i] \supseteq \mathbb{Q}$  (שדה הפיצול של  $x^4 - 7$  מעל  $\mathbb{Q}$  בתוך  $\mathbb{C}$ ).

**תשובה.** ההתאמה

$$E : \mathbb{Q} \subset E \subset K \leftrightarrow \{H : H < \text{Gal}(K/\mathbb{Q})\}$$

$H \mapsto K^H, E \mapsto \text{Gal}(K/E)$   
הפיכה  $K^H/\mathbb{Q} \leftrightarrow H \triangleleft G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  גלואה.  
בתרגיל בית 6 שאלה 4 הוכחנו  $G \cong D_8$

$$D_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

כל  $\sigma \in G$  נקבע ע"י  $\sigma(\sqrt[4]{7}) = \zeta \sqrt[4]{7}, \sigma(i) = \pm i, \zeta^4 = 1$ , נכתוב  $\sigma = \sigma_{\zeta, j}, j \in \{\pm 1\}$  זה מגדיר 8 אפ'  $[K : \mathbb{Q}] = 8$  לכן אלה בדיוק כל איברי  $G$ .  
 $b = \sigma(1, -1), a = \sigma_{i, 1}$   
(ואז  $a(i) = i, a(\sqrt[4]{7}) = i\sqrt[4]{7}, a(\sqrt[4]{7}) = \sqrt[4]{7}, b(i) = -i, b(\sqrt[4]{7}) = \sqrt[4]{7}$ )  
ת"ח של  $D_8$  הן מסדרים 8, 4, 2, 1 לפי לגרנז'. לפי טענה הנובעת ממשפטי סילו על חבורות יש ת"ח לכל אחד מהסדרים הנ"ל.  
ת"ח מסדר 2: ת"ח כזאת היא מהצורה  $\{1, x\}$  ל- $x$  מסדר 2.  
 $\langle a^3b \rangle, \langle a^2b \rangle, \langle ab \rangle, \langle b \rangle$  מכיון ש- $(a^kb)(a^k)b = 1$  (לכן  $ba^kb = a^{-k}$ )  
יתר הת"ח מסדר 2.  
ת"ח מסדר 4:  $\langle a \rangle \triangleleft G$  מסדר 4

**תרגיל.** יש 3 ת"ח מסדר 4:  $\langle a \rangle, \{1, a^2, b, a^2b\}, \{1, a^2, ab, a^3b\}$ .

נמצא את שדות הביניים:

$H = \langle a^2 \rangle$  לפי ההגדרה  $K^H = \{k \in K \mid \sigma(k) = k \forall \sigma \in H\}$ .  $a(i) = i$  לכן גם  $a^2(i) = i$  על מה עוד שומר  $a^2$ ?  $a^2(\sqrt[4]{7}) = -\sqrt[4]{7}$  לכן  $a^2(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ .  
 $[K : K^H] = 2$  לפי המשפט  $[K : K^H] = |H|$ . לכן  $[K^H : \mathbb{Q}] = 4$ .  
 $K^H = \mathbb{Q}[\sqrt{7}, i]$

נרצה לבדוק האם זאת הרחבת גלואה.  $K^H/\mathbb{Q}$  היא גלואה או כי  $K^H$  הוא שדה הפיצול של  $(x^2 - 7)(x^2 + 1)$  מעל  $\mathbb{Q}$  בתוך  $\mathbb{C}$  או כי בדיקה ישירה מראה ש- $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ .

$H = \langle a \rangle$   
 $[K : K^H] = |H| = 4$  מדובר ב-2.  $[K^H : \mathbb{Q}] = 2$ .  $a(i) = i$  לכן  $\mathbb{Q}[i] : \mathbb{Q} = 2$ .  
 $K^H = \mathbb{Q}[i]$  הרחבת גלואה  $(H \triangleleft G)$  כי  $[G : H] = 2$  או ישירות כשדה פיצול של  $(x^2 + 1)$ .  
 $H = \langle b \rangle$

$i\sqrt[4]{7} \notin K^H$  כי למשל  $K^H = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}]$  לכן  $b(\sqrt[4]{7}) = \sqrt{7}$ ,  $[K^H : \mathbb{Q}] = 4$  וזה שורש של פולינום  $x^4 - 7$  ו- $K^H$  מכיל שורש שלו.

$H = \langle ab \rangle$   
 $[K^H : \mathbb{Q}] = 4$ . נראה דרך קצת יותר כללית למצוא איברים שנשמרים.  $(ab)(i) = -i$ ,  $(ab)(\sqrt[4]{7}) = i\sqrt[4]{7}$ . נרשום איבר ב- $K$  בצורה  $x + yi$  עבור  $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}]$ . בסיס של  $K$  מעל  $\mathbb{Q}$  נתון ע"י  $\{1, \sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{7^2}, \sqrt[4]{7^3}, i, i\sqrt[4]{7}, i\sqrt[4]{7^2}, i\sqrt[4]{7^3}\}$ .

$$(ab)(x + yi) = ab(x) + ab(y)ab(i) = ab(x) - ab(y)i$$

צריך להתקיים:  $ab(x + yi) = x + yi$  נרשום:

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[4]{7} + \alpha_2 \sqrt[4]{7^2} + \alpha_3 \sqrt[4]{7^3}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \sqrt[4]{7} + \beta_2 \sqrt[4]{7^2} + \beta_3 \sqrt[4]{7^3}$$

כאשר  $i = 0, 1, 2, 3, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$

$$ab(x + yi) = \dots = \alpha_0 + \beta_1 \sqrt[4]{7} - \alpha_2 \sqrt[4]{7^2} - \beta_3 \sqrt[4]{7^3} + i(-\beta_0 + \alpha_1 \sqrt[4]{7} + \beta_2 \sqrt[4]{7^2} - \alpha_3 \sqrt[4]{7^3})$$

משווים חלק ממשי מדומה:

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\beta_3$$

$$\beta_0 = 0$$

$$x + yi = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[4]{7}(1 + i) + \beta_2 \sqrt[4]{7^2}i + \alpha_3 \sqrt[4]{7^3}(1 - i)$$

מכיוון ש- $(1 + i)^2 = 2i$ , נקבל:

$$K^H = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}(1 + i)]$$

$(\sqrt[4]{7}(1 + i))$  ממעלה 4 מעל  $\mathbb{Q}$ .  
 $\langle ab \rangle \not\cong D_8$  לכן,  $K^H/\mathbb{Q}$  לא גלואה.  
 $H = \langle a^2b \rangle$

$\mathbb{Q} \subseteq a(K^{(b)}) \subseteq a\{1, b\}a^{-1} = \{1, a^2b\}$  לכן עבור  $k = 1$   $a^kba^{-k} = a^kba^{-k}bb = a^{2k}b$   
 $K$  שדה הביניים המתאים לחבורת

$$\text{Gal}(K/aK^{(b)}) = a \text{Gal}(K/K^{(b)})a^{-1} = a\langle b \rangle a^{-1} = \langle a^2b \rangle$$

$$K^{\langle a^2b \rangle} = a(K^{\langle b \rangle}) = a\mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}] = \mathbb{Q}[a\sqrt[4]{7}] = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}i]$$

$$\begin{array}{l} :H = \langle a^3b \rangle \\ a(ab)a^{-1}a^3b \end{array}$$

$$K^H = aK^{\langle ab \rangle} = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}(i-1)]$$

$$:H = \{1,a^2,b,a^2b\}$$

$$K^H=\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$$

$$\begin{array}{l} \text{גלואה} \\ H = \{1,a^2,b,a^3b\} \\ K^H = \mathbb{Q}[i\sqrt{7}] \end{array}$$

$$\underbrace{K^{H_1}}_{\mathbb{Q}[\sqrt{7}]} \subseteq \underbrace{K^{\langle a^2 \rangle}}_{\mathbb{Q}[\sqrt{7},i]} \text{ וא } \langle a^2 \rangle < H_1 \text{ אם } \text{נשים לב שהפעולה הופכת התאמה:}$$