

אלגברה ב' 2 – תרגול 6

4.4.11

הרחבות פרידות

נתונה הרחבה פרידה L/K , כלומר הרחבה אלגברית ולכל $\alpha \in L$, הפולינום הא"פ של α מעל K מתפצל ב- $\tilde{K}$ לגורמים לינאריים שונים.

קבוצת השיכונים: $\{\sigma : L \rightarrow \tilde{K} \mid \sigma|_K = \text{id}\}$

שאלה. יהי $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}] \subseteq \mathbb{C}$.

1. חשבו את $[K : \mathbb{Q}]$. ברור $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \subseteq K$. ברור שההרחבה $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ היא ממעלה 3, ונוכיח שגם $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \subseteq K$ ממעלה 3.

פתרון. תחילה $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. בשלילה, אם שייד אז $R = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
 $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$.

יהי $\sigma \in \text{Ism}_{\mathbb{Q}}(R, \tilde{\mathbb{Q}})$ (קיים כי $\text{char } \mathbb{Q} = 0$ לכן $R/\mathbb{Q}$ פרידה והוכחנו $3 = [R : \mathbb{Q}] = |\text{Ism}_{\mathbb{Q}}(R, \tilde{\mathbb{Q}})|$).

יש $\zeta, \zeta' \neq 1$ כך ש- $\zeta^3 = (\zeta')^3 = 1$, $\zeta \neq \zeta'$.

$$\sigma(\sqrt[3]{5}) = \zeta' \sqrt[3]{5}$$

$$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \zeta \sqrt[3]{2}$$

אם למשל $\zeta' = 1$ אז $\sigma(\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{5}$ ואז $\sigma = \text{id}$.

נכתוב $\sqrt[3]{2} = a_0 + a_1 \sqrt[3]{5} + a_2 \sqrt[3]{25}$ נפעיל את σ :

$$\zeta \sqrt[3]{2} = a_0 + a_1 \zeta' \sqrt[3]{5} + a_2 (\zeta')^2 \sqrt[3]{25}$$

נכפיל את (1) ב- ζ :

$$\zeta \sqrt[3]{2} = a_0 \zeta + a_1 \zeta \sqrt[3]{5} + a_2 \zeta \sqrt[3]{25}$$

נחסר:

$$0 = a_0(1 - \zeta) + a_1(\zeta' - \zeta) \sqrt[3]{5} + a_2((\zeta')^2 - \zeta) \sqrt[3]{25}$$

קיבלנו תלות לינארית של $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}, 1$ מעל $\mathbb{Q}[\zeta]$ בסתירה כי $[\mathbb{Q}[\zeta, \sqrt[3]{5}] : \mathbb{Q}] = 6$ שכן ζ אלגברי מעל $\mathbb{Q}$ ממעלה 2, $x^2 + x + 1$ זה הפולינום האי פריק. נותר לנמק מדוע $\zeta, \zeta' \in \mathbb{Q}[\zeta]$. וזה נכון מפני ש- $\zeta = e^{2i\theta/2}, \zeta' = e^{4i\theta/2}$. לכן, $a_0 = 0 \Leftrightarrow \zeta \neq 1$ אם $\zeta = \zeta'$ אז $a_1 = 0$ ואם $\zeta'^2 = \zeta$ אז $a_2 = 0$. לכן אם $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ או אם $a_2 = 0$

$$\sqrt[3]{2} = a_1 \sqrt[3]{5}$$

בסתירה (אם $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \in \mathbb{Q}$ אז ל- $x^3 - \frac{2}{5}$ יש שורש ב- $\mathbb{Q}$ אז ל- $5x^3 - 2$ יש שורש ב- $\mathbb{Q}$ וזה לא נכון). כעת, $\sqrt[3]{2}$ אינו ממעלה 2 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.

$$x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$$

כי ל- $a \in \mathbb{R}^+$:

$$x^n - a = (x - a^{1/n})(\dots)$$

אם $\sqrt[3]{2}$ מקיים משוואה ריבועית מעל $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ אז המשוואה הזו מכילה בדיוק גורם אחד ממעלה 1 של $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}$ אבל השורשים של הפולינום הזה לא ב- $\mathbb{R}$. הדיסקרימיננט $D(x^3 - 2) = -27(-2)^2 < 0$ לכן $\sqrt[3]{2}$ ממעלה 3 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ לכן $[K : \mathbb{Q}] = 9$.

2. תארו את $X = \text{Ism}_{\mathbb{Q}}(K, \tilde{\mathbb{Q}})$.

פתרון. $K/\mathbb{Q}$ פרידה לכן $|X| = 9$. $\sigma \in X$ אז

$$\sigma(\sqrt[3]{5}) = \zeta' \sqrt[3]{5}$$

$$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \zeta \sqrt[3]{2}$$

$$\zeta^3 = (\zeta')^3 = 1$$

נסמן $\sigma = \sigma_{\zeta, \zeta'}$ זה מגדיר 9 אפשרויות יש 9 שיכונים לכן אלה בדיוק כל השיכונים.

$$\sigma_{\zeta, \zeta'}(xy) = \sigma_{\zeta}(x)\sigma_{\zeta'}(y)$$

ואז למשל

$$\sigma_{\zeta, \zeta'}(\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}) = \zeta\zeta'\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}$$

3. חשבו את מעלת $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון. $\mathbb{Q} \subseteq \underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}]}_{K'} \subseteq K$. $K'/\mathbb{Q}$ פרידה,

$$[K' : \mathbb{Q}] = |\text{Ism}_{\mathbb{Q}}(K', \tilde{\mathbb{Q}})|$$

הראינו בשיעור ש- $\tau \in \text{Ism}_{\mathbb{Q}}(K', \tilde{\mathbb{Q}})$ מתקבל מצמצום של $\sigma \in \text{Ism}_{\mathbb{Q}}(K, \tilde{\mathbb{Q}})$ ($\mathbb{Q} \subseteq K' \subseteq K$).

$$\tau(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}) = \tau_{\zeta, \zeta'}(\sqrt[3]{2}) + \tau_{\zeta, \zeta'}(\sqrt[3]{5}) = \zeta \sqrt[3]{2} + \zeta' \sqrt[3]{5}$$

הערך הזה קובע את τ ביחידות.

מתי שתי תמונות כאלה שוות? כלומר מתי $\sigma_{\zeta_1, \zeta'_1}|_{K'} = \sigma_{\zeta_2, \zeta'_2}|_{K'}$ צריך להתקיים:

$$\zeta_1 \sqrt[3]{2} + \zeta'_1 \sqrt[3]{5} = \zeta_2 \sqrt[3]{2} + \zeta'_2 \sqrt[3]{5}$$

$$(\zeta_1 - \zeta_2) \sqrt[3]{2} = (\zeta'_2 - \zeta'_1) \sqrt[3]{5}$$

$$\zeta'_2 = \zeta'_1 \Leftrightarrow \zeta_1 = \zeta_2$$

ואחרת,

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \frac{\zeta'_2 - \zeta'_1}{\zeta_1 - \zeta_2} \in \mathbb{Q}[\zeta]$$

כמו קודם.

$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}) : \mathbb{Q}] = 3$, $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 2$, $2, 3$ זרים ולכן הצמצום זה העתקה חח"ע $[K' : \mathbb{Q}] = 9$.