

אלגברה ב' 2 – תרגול 4

21.03.11

מספרים אלגבריים

תהי L/k הרחבה של שדות. $a \in L$ נקרא אלגברי מעל K אם יש פולינום $0 \neq f \in K[x]$ כך ש- $f(a) = 0$.

a אלגברי- $K[a] \Leftrightarrow K[a] \subseteq K$ שדה. אם a אלגברי אז בסיס- K ל- $K[a]$ נתון ע"י $\{1, a, \dots, a^{n-1}\}$, כאשר הפולינום $p \in K[x]$ הא"פ של a הוא ממעלה n .

דוגמא. $L = \mathbb{R}, K = \mathbb{Q}, a = \sqrt[3]{5}$ הפולינום הא"פ של a מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^3 - 5$ וזה מוכיח גם ש- a אלגברי מעל $\mathbb{Q}$ וגם מוצא בסיס ל- $K[a]$ מעל K : $\{1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}\}$.

חשבון בשדה $K[a]$:

יהי $g \in K[x], g \neq 0$ פולינום. נניח $g(a) \neq 0$. נחשב $\frac{1}{g(a)}$. נניח p הפולינום הא"פ של a . p, g זרים כי p א"פ ו- $g(a) \neq 0$. לכן מאלגוריתם אוקלידס קיימים $h, b \in K[x]$ כך ש- $hg + bp = 1$. נציב a ונקבל: $h(a)g(a) = 1$ כי $p(a) = 0$ ולכן $g(a)^{-1} = h(a)$.

שאלה. יהיו $a, b \in L$ אלגבריים- K ממעלות n, m בהתאמה. נניח $(m, n) = 1$. צ"ל $K[a, b] : K = mn$.

תשובה. קודם כל $K[a, b] = (K[a])[b]$ וכעת היות ו- $(K[a])[b] : K[a] = mn$ שדה אז גם $K[a, b] : K = mn$ לפי נוסחאת המגדל:

$$l = [K[a, b] : K] = \underbrace{[K[a][b] : K[a]]}_{\leq m} \underbrace{[K[a] : K]}_{=n} \leq mn$$

וגם, $n|l$ וכן $m|l$ ולכן $mn|l$ (כי m, n זרים).

הערה. בנתונים של השאלה, $K[a, b] = \text{span}_K \{a^i b^j \mid 0 \leq i < n, 0 \leq j < m\}$.

שאלה. יהי $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$. הראו ש- α אלגברי - $\mathbb{Q}$ ומצאו את מעלתו (כלומר את $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$).

למה. יהיו $F \subset K \subset E$ אם $[E : F] < \infty$ אז:

1. אם $[E : F] = [K : F]$ אז $K = E$.

2. אם $[E : K] = [E : F]$ אז $K = F$.

הוכחה. $[E : F] = [E : K][K : F]$.

1. $[E : K] = 1$ ואז $E = K$.

2. $[K : F] = 1$ ואז $K = F$.

□

תשובה. $\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}$ אלגבריים- $\mathbb{Q}$. מתרגיל בית, סכום של אלגבריים הוא אלגברי ולכן α אלגברי.
נמצא את $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}]$$

$[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 6$ כי $\sqrt{2}$ אלגברי ממעלה 2 ו- $\sqrt[3]{2}$ אלגברי ממעלה 3 ומשאלה קודמת (1) $(2, 3) = 1$. בפרט: $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 1, 2, 3, 6$ כי

$$6 = [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}[\alpha]][\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$$

נניח ממימד 1: אז $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}$ בפרט $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2} = \alpha \in \mathbb{Q}$ אז $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ ו- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$$6 = [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = \underbrace{[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\sqrt{2}] : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]]}_{=1} \underbrace{[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}]}_{=3}$$

נניח ממימד 2: אז α מקיים משוואה ריבועית מעל $\mathbb{Q}$. אז גם $\sqrt[3]{2}$ מקיים משוואה ריבועית מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, כי נניח $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})^2 + b(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}) + c = 0$ עבור $b, c \in \mathbb{Q}$. נקבל:

$$(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2}(2\sqrt{2} + b) + (b\sqrt{2} + 2 + c) = 0$$

לכן,

$$6 = [\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = \underbrace{[\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]]}_{\leq 2} \underbrace{[\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}]}_{=2}$$

נניח ממימד 3: α מקיים משוואה ממעלה 3 מעל $\mathbb{Q}$ אז $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ מקיים משוואה ממעלה 2 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ כי

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})^3 = 2 + 3 \cdot (\sqrt[3]{2})^2 \sqrt{2} + 3 \sqrt[3]{2} 2 + (\sqrt{2})^3$$

הגורמים במשוואה $\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$, $b, c, d \in \mathbb{Q}$ תורמים חזקות $2 \geq$ של $\sqrt[3]{2}$. כמו במקרה הקודם זאת סתירה. לכן $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 6$ ומהלמה נקבל $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 6$.

הערה. נבדוק ישירות ש- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. נניח בשלילה שיש $a, b, c \in \mathbb{Q}$ כך ש- $\sqrt{2} = a \cdot 1 + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$. כי $1, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2$ הוא בסיס ל- $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

$$2 = a^2 + b^2 \sqrt[3]{4} + c^2 \sqrt[3]{16} + 2ab \sqrt[3]{2} + 2bc \sqrt[3]{8} + 2ac \sqrt[3]{4}$$

$$2 = a^2 + 4bc + (2ab + 2c^2) \sqrt[3]{2} + (2ac + b^2) \sqrt[3]{4}$$

לכן,

$$\begin{cases} a^2 + 4bc = 2 & (1) \\ 2ab + 2c^2 = 0 & (2) \\ 2ac + b^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$a = 0 \xrightarrow{3} b = 0 \xrightarrow{2} c = 0$$

סתירה.

$$a \neq 0 \xrightarrow{3} c = -\frac{b^2}{2a} \xrightarrow{2} 2ab + \frac{2b^4}{4a^2} = 0$$

אם $b = 0$ אז $a^2 = 2$ בסתירה ($a \in \mathbb{Q}$). אם $b \neq 0$ אז $a + \frac{b^3}{4a^2} = 0$ אז $4 = \left(-\frac{b}{a}\right)^4$ בסתירה.