

אלגברה ב' 2 – תרגול 11

30.5.11

הערות

1. יהי $p > 2$ ראשוני, אז יש $f \in \mathbb{Q}[x]$ א"פ ממעלה p עם בדיוק 2 שורשים ב- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. עבור $p = 3$ ניקח $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $q, a > 0$, $q \gg a$, ראשוני אז $f = x^3 + ax + q \in \mathbb{Q}[x]$ א"פ (שורש יהיה מהצורה $\pm 1, \pm q$ והם לא שורשים). כמו כן, $\Delta f = -27q^2 - 4a < 0$, ומתרגיל 3 שאלה ראשונה יש שורש ממשי אחד.

2. להביע את $r_5 = e^{2\pi i/5}$ ע"י רדיקלים או לחשב $\cos(72), \sin(72)$ (כלומר $r_5 = \dots (\frac{\sqrt{a+b}}{c})$). כתיבה כזו קיימת כי r_5 שייך להרחבה רדיקלית.

כתבנו $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ (r_5 פתרון). נחלק ב- x^2 : $x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} = 0$. נסמן $y = x + x^{-1}$ ואז $y^2 + y - 1 = 0$ ולכן $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. נכפיל את השוויון של y ב- x ונקבל $x^2 - xy + 1 = 0$ ולכן $x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ ואז השורשים הם

$$\frac{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4}}{2}$$

נבחר $y_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ואז $x_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}i$ אבל $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ ולכן $r_5 = e^{2\pi i/5} = \cos 72 + i \sin 72$ וכיוון ש- $r_5 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i$, $\cos 72 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

הרחבות אי פרידות טהורות

תהי L/K הרחבה אלגברית. L/K היא פרידה אם לכל $x \in L$ הפולינום הא"פ של x מעל K יתפצל לגורמים לינארים שונים ב- $\tilde{K}$. L/K היא אי פרידה אם היא אינה פרידה. L/K היא אי פרידה טהורה אם $x \in L$ פריד גורר ש- $x \in K$. כל $x \in L/K$ בהרחבה אי פרידה טהורה נקרא אי פריד טהור (הגדרה שקולה - x אי פריד טהור אם לפולינום הא"פ של x יש רק שורש אחד). להרחבה אלגברית L/K נסמן $F = \{x \in L : K \text{ פריד מעל } x\}$ שדה, F/K פרידה, L/F אי פרידה טהורה. נניח $K \supsetneq K_S$. בפרט K/F סופית. יהי K_S הסגור הפריד של F ב- K . נניח $\text{char } F = p > 0$ ולכן $a \in K/K_S$ קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $a^{p^m} \in K_S$. נניח כי m הוא הראשון עם התכונה הנ"ל. אז:

טענה. $x^{p^m} - a^{p^m} \in K_S[x]$ א"פ. זה הפולינום המינימלי של a מעל K_S .

הערה. בשיכור ראינו שהפולינום המינימלי של a מעל K_S הוא מהצורה $x^{p^n} - a^{p^n}$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו.

הוכחה. אנו יודעים כי הפולינום המינימלי של a מעל K_S הוא מהצורה $(x-a)^r$ עבור איזשהו $r > 0$ (כי אם $g(x) \in K_S[x]$ הפולינום המינימלי אז $g|x^{p^m} - a^{p^m}$ ב- $K_S[x]$ ולכן מעל K מחלק את $x^{p^m} - a^{p^m} = (x-a)^{p^m}$).

$$(x-a)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} x^k (-1)^{r-k} a^{r-k} \in K_S[x]$$

בפרט, המקדם של x^{r-1} ב- K_S כלומר $-ra \in K_S$. אולם $a \in K_S$ לכן $r = 0$ ב- F (אחרת $a = -r^{-1}(-ra) \in K_S$ כלומר $p|r$ נרשום $r = p^t r'$ כאשר $1 \leq t < m$, (כי אם $t \geq m$ אז $r > p^m$ בסתירה להנחה שהפולינום המינימלי מדרגה r וכן $p \nmid r'$ $(x^{p^m} - a^{p^m} = 0$).

$$(x-a)^r = (x^{p^t} - a^{p^t})^{r'} = \sum_{k=0}^{r'} \binom{r'}{k} (x^{p^m})^k (-1)^{r'-k} (a^{p^t})^{r'-k}$$

ושוב המקדם של $x^{r'-1}$ ב- K_S לכן $-r'a^{p^t} \in K_S$ ואז $p|r'$ בסתירה לכך ש- $1 < r < p$
 (כי $a^{p^t} \notin K_S$ ממינימליות m). $\square$

דוגמא. יהי t משתנה, $L = F_3(t)$, $K = F_3(t^6)$, זה הפולינום הא"פ של t מעל K (מקרטין) L/K הרחבה אלגברית. $x^6 - t^6 \in K[x]$ איזשטיין, $t^6 \in F[t^6]$ ראשוני. $[L : K] = 6$, $(x^6 - t^6)' = 6x^5 = 0$ כי $\text{char } F_3 = 3$. לכן t לא פריד מעל K . מצד שני הפולינום הא"פ של $t^3 \in L$ הוא $x^2 - t^6$ נגזרתו $2x \neq 0$ לכן t^3 פריד מעל K . לכן L/K אי פרידה אך לא אי פרידה טהורה כעת נסמן $F = K(t^3)$, פרידה F/K , $L = K(t) = F(t^2)$ (כאשר $t^2 \in F$ ו- $t^3 \in F$). אי פריד מעל F כי הפולינום הא"פ שלו הוא $x^3 - t^6 \in K[x]$ ונגזרתו $3x^2 = 0$. לכן, L/F אי פרידה טהורה. מתקיים $L \subseteq F \subseteq K$ לכן F הוא הסגור הפריד של K בתוך L (אחרת יש $x \in L/F$ פריד מעל K).

$$6 = [L : K] = \underbrace{[L : F]}_{=3} \underbrace{[F : K]}_{=2}$$

$$[L : K]_S = [F : K] = 2$$

$$[L : K]_i = \frac{6}{2} = 3$$