

אלגברה ב' 2 - תרגול 10

23.5.11

הרחבות אבליות

הגדרה. הרחבת גלואה L/K נקראת אבלית אם $\text{Gal}(L/K)$ היא חבורה אבלית.

טענה. תהי K/F גלואה מפיץ סופי, נסמן $G = \text{Gal}(K/F)$. תהי G' חבורת הקוטטור של G ונסמן $E = K^{G'}$. אז לכל שדה ביניים $F \subseteq L \subseteq K$, L/F אבלית אם ורק אם $L \subseteq E$.

תזכורת. לחבורה G , $G' = \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, $G' \triangleleft G$, G/G' אבלית ולכל $H \triangleleft G$ כך ש- G/H אבלית $G' \leq H$.

הוכחה. $\Leftarrow$: מכיוון ש- $G' = \text{Gal}(K/E)$, $G' \triangleleft G \Leftrightarrow E/F$ גלואה.

$$\text{Gal}(E/F) \cong \underbrace{\text{Gal}(K/F) / \text{Gal}(K/E)}_{\text{אבלית}}$$

לכן, $F \subseteq L \subseteq K$, L/F בפרט גלואה. בנוסף K/F גלואה לכן גם K/L גלואה. $\text{Gal}(K/L) \triangleleft \text{Gal}(K/F) = G$, לכן,

$$\text{Gal}(L/F) \cong \text{Gal}(K/F) / \text{Gal}(K/L)$$

אבלית.

אבל אז $G' < \text{Gal}(L/F)$ ואז $L = K^{\text{Gal}(L/F)} \subseteq K^{G'} = E$.
 $\Rightarrow$:

נניח $F \subseteq L \subseteq E$, E/F גלואה, לכן E/L גלואה.

$$\text{Gal}(E/L) < \underbrace{\text{Gal}(E/F)}_{\text{אבלית}}$$

לכן, $\text{Gal}(E/L) \triangleleft \text{Gal}(E/F)$ ולכן L/F גלואה. אבל,

$$\text{Gal}(L/F) \cong \underbrace{\text{Gal}(E/F) / \text{Gal}(E/L)}_{\text{אבלית}}$$

□

לכן L/F אבלית.

הגדרה. הרחבה L/K נקראת רדיקלית אם $L = K(\alpha)$ עבור $\alpha \in L$ כך ש- $\alpha^n \in K$ ל- n טבעי כלשהו.

הגדרה. הרחבה L/K נקראת הרחבה ע"י רדיקלים אם יש

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r = L$$

כך ש- K_i/K_{i-1} רדיקלית ($i > 0$).

הגדרה. $f \in K[x]$ א"פ. נאמר כי $f(x) = 0$ פתירה ע"י רדיקלים אם ל- f יש שורש בהרחבה ע"י רדיקלים.

דוגמא. תהי $x^2 + bx + c = f \in \mathbb{C}[x]$ כאשר $f \in F[x]$ $F = \mathbb{Q}(b, c)$. לפי הנוסחא למשוואה ריבועית $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, $x_{1,2} \in F(\sqrt{\Delta})$, $F \subseteq F(\sqrt{\Delta})$ ו- $(\sqrt{\Delta})^2 \in F$ הרחבה רדיקלית, כי $f(x) = 0$ פתירה ע"י רדיקלים.

כלומר $f(x) = 0$ (לפעמים אומרים פשוט f) פתירה ע"י רדיקלים. הוכחנו בשיעור ש- $f(x) = 0$ פתירה אם ורק אם $\text{Gal}(f, K)$ פתירה.

תזכורת. חבורה G היא פתירה אם יש $G_0 \triangleleft \dots \triangleleft G_r = G$ כך ש- G_i/G_{i-1} אבליה, $i > 0$ ואם G סופית אז זה שקול לכך ש- G_i/G_{i-1} מעגלית.

שאלה. יהי $f \in \mathbb{Q}[x]$ א"פ ממעלה p , ראשוני. נניח כי ל- f יש בדיוק $p-2$ שורשים ממשיים אז $\text{Gal}(f, \mathbb{Q}) \cong S_p$.

מסקנה. בפרט ל- $p \geq 5$ לא פתירה ע"י רדיקלים.

תשובה. יהי K שדה הסיצול ב- $\mathbb{C}$ של f מעל $\mathbb{Q}$. יהי $\alpha \in K$ שורש של f . אז

$$p = \deg f = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] [K : \mathbb{Q}]$$

כי הפולינום א"פ. לכן

$$p \mid |G| = |\text{Gal}(K/\mathbb{Q})|$$

אם נחשוב על G כתת חבורה של S_p , אז יש ב- G איבר a מסדר p (ניקח חבורת p סילו, היא מסדר p^k , $k > 0$ ואז יש לה מרכז לא טריוויאלי ולפי למת קושי יש בו איבר מסדר p). כלומר a מחזור באורך p (כי אם $a = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ כתיבה כמכפלת מחזורים זרים $(p, \dots, p)$). $o(a) = (cm(o(\sigma_1), \dots, o(\sigma_k)))$ ראשוני. בנוסף יש $b \in G$ חילוף $b = (i, j)$ ל- $b \neq j$. תהי τ ההצמדה המרוכבת $\tau(z) = \bar{z}$. משאירה במקום את $p-2$ השורשים הממשיים של f ומחליפה בין שני השורשים המרוכבים שאינם ממשיים. אז $b = \tau|_K \in G$. מתרגיל בית, $S_p = \langle a, b \rangle$.

יהי $\zeta_n \in \mathbb{C}$ שורש יחידה n פרימיטיבי, $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ אבליה (מהשיעור) ובפרט פתירה וגם רדיקלת ($\zeta_n^n = 1$). לכן הפולינום $b \in \mathbb{Q}[x]$ הא"פ של ζ_n מקיים $b(x) = 0$ פתירה. לכן, יש שורש ל- b בהרחבה ע"י רדיקלים.

דוגמא. נראה ש- ζ_5 שייך להרחבה ע"י רדיקלים. $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ הפולינום האי פריק. נבנה הרחבה ע"י רדיקלים שמכילה את ζ_5 . נחלק את f ב- x^{-2} :

$$x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} = 0$$

מסמנים $y = x + x^{-1}$ ומקבלים $y^2 + y - 1 = 0$. $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. נכפיל את (*) ב- x : $x^2 - yx + 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \left((-1 \pm \sqrt{5}) \pm (-10 \pm 2\sqrt{5}) \right)$$

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}) \ni \zeta_5$$