

אלגברה ב' 2 – תרגול 1

28.02.11

חוגים

הגדרה. R חוג חילופי עם יחידה $1 \in R, 0 \neq 1$, ההפיכים

$$R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R \quad ab = 1\}$$

דוגמא.

$$M_n(F)^* = GL_n(F)$$

הגדרה. $S \subseteq R$ היא תת חוג אם S חוג תחת צמצום הפעולות ב- R וכן $1 \in S$.

הגדרה. קבוצה $I \subseteq R$ נקראת אידאל אם היא חבורה חיבורית וכן לכל $a \in I, r \in R$ מתקיים $r \cdot a \in I$.

הערה. אם החוג לא חילופי צריך לדבר על אידאל שמאלי ואידאל ימני אבל לא נעסוק בזה.

שאלה:

יהי $f: A \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים. צ"ל שיש התאמה חח"ע ועל בין

$$\{\text{אידאל } I \subseteq A \mid \text{Ker } f \subseteq I\} \leftrightarrow \{\text{אידאל } J \subseteq f(A) \mid I \subseteq f(A)\}$$

$$I \mapsto f(I)$$

$$J \mapsto f^{-1}(J)$$

הוכחה. ההתאמה בין החבורות החיבוריות מוכרת. אם $I \subseteq A$ אידאל אז

$$f(I) \leftarrow a \in A \text{ לכל } f(a)f(I) = f(aI) = f(I)$$

אנחנו לא טוענים שזה אידאל של B אלא של התמונה של A .

להיפך, אם $J \subseteq f(I)$ אידאל. יהי $a \in f^{-1}(J)$ ו- $r \in A$.

$$f(ra) = f(r) \underbrace{f(a)}_{\in J} \in J \Rightarrow ra \in f^{-1}(J)$$

□

הלמה של צורן

הגדרה. יחס בינארי חלקי $\leq$ על קבוצה (לא ריקה) X הוא יחס המקיים: $\forall x, y, z \in X$

$$1. x \leq x.$$

$$2. x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y.$$

$$3. x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

הגדרה. איברים $x, y \in X$ ניתנים להשוואה אם $x \neq y$ או $x \neq y$.

הגדרה. איבר מקסימלי ב- X הוא איבר $m \in X$ כך שאין $m \neq x \in X$ המקיים $m \leq x$.

נשים לב שלא דווקא כל האיברים ברי השוואה עם איבר מקסימלי.

למה. הלמה של צורן

תהי $(X, \leq)$ קבוצה לא ריקה סדורה חלקית. נניח שלכל $C \subseteq X$ שרשרת (כלומר, לכל $x, y \in C$ ניתנים להשוואה) יש חסם מעילי (כלומר יש $a \in X$ כך שלכל $c \in C$, $c \leq a$) אז יש ב- X איבר מקסימלי.

שאלה: יהי $I \subsetneq R$ אידאל אז יש $I \subseteq m \subsetneq R$ אידאל מקסימלי.

הוכחה. תהי X קבוצת האידאלים החלקיים ממש ל- R ומכילים את I . X לא ריקה כי $I \in X$. נגדיר ע"י הכלה. תהי C שרשרת נגדיר $m_C = \bigcup_{J \in C} J$. אז m_C אכן גדול שווה (מוכל) מכל איבר בשרשרת.

$$m_C \in X: m_C \subseteq J \subseteq m_C \text{ לכל } J \in C.$$

$$m_C \subsetneq R \text{ כי } m_C \not\subseteq 1 \text{ לכל } J \in C.$$

$$m_C \text{ אידאל כי אם } x, y \in m_C \text{ נניח } x \in J_1, y \in J_2 \text{ בה"כ } J_1 \subseteq J_2 \text{ ולכן } x+y \in J_2 \subseteq m_C.$$

$$\text{אם } x \in m_C, r \in R \text{ אז } rx \in J_1 \subseteq m_C.$$

מהלמה של צורן יש $m \in X$ מקסימלי. לפי ההגדרות אכן $I \subseteq m \subsetneq R$ אידאל מקסימלי.

□

איברים אי פריקים ואיברים ראשוניים

R תחום.

הגדרה. יהי $a \in R$, $a \neq 0$ לא הפיך. a הוא אי פריק אם $a = bc$ גורר ש- b הפיך או c הפיך.

הגדרה. יהי $a \in R$, $a \neq 0$ לא הפיך. a הוא ראשוני אם $a|bc$ גורר ש- $a|b$ או $a|c$.

הראינו בשיעור שכל ראשוני הוא אי פריק. ההפך לא דווקא נכון. נראה שלעיתים דווקא נכון:

שאלה:

יהי $UDF R$ (תחום פריקות יחידה). הוכיחו כי $a \in R$, $a \neq 0$ לא הפיך הוא א"פ $\Leftrightarrow a$ ראשוני.

הוכחה. ראינו בשיעור שבכל תחום R ראשוני הוא אי פריק. לכיוון השני נניח כי $a|bc$ נכתוב

$$bc = ad \text{ נכתוב את } b, c, d \text{ כמכפלות של אי פריקים ואיברים הפיכים למשל: } b = \varepsilon \prod_{i=1}^k q_i$$

$q_i \in R^*$ מכיוון ש- a אי פריק, מיחידות הפירוק a מופיע עד כדי איבר הפיך בפירוק

□

$$\text{של } b \text{ או של } c. \text{ לכן } a|b \text{ או } a|c.$$

שאלה: יהיו R, S חוגים. הוכיחו כי כל אידאל $K \subseteq R \times S$ הוא מהצורה $K = I \times J$

כאשר $I \subseteq R, J \subseteq S$ אדאלים וכן $R \times S$ מוגדר כחוג עם פעולות לפי רכיבים.

הוכחה. ברור ש- $I \times J$ אידאל $(r, s) \in R \times S$ $(a, b) \in I \times J$ למשל:
 $(r, s)(a, b) = (ra, sb) \in I \times J$ יהי $K \subseteq R \times S$ אידאל. נגדיר

$$I\{i \in R | (i, 0) \in K\} \quad J = \{j \in S | (0, j) \in K\}$$

I, J אידאלים. ל- K $(i, j) \in K$

$$(0, j) = (0, 1)(i, j) \in K$$

$$(i, 0)(1, 0)(i, j) \in K$$

לכן,

$$(i, j) \in I \times J$$

הכיוון השני הוא מיידי: עבור $(i, j) \in I \times J$

$$(i, j) = \underbrace{(i, 0)}_{\in K} + \underbrace{(0, j)}_{\in K} \in K$$

□