

אלגברה ב' 2 – הרצאה 9

21.03.11

התחלנו להוכיח משפט:

משפט. K שדה.

1. ל- K יש סגור אלגברי L .

2. אם $\theta_0 : K \rightarrow \bar{K}$ שייכון שדות ו- $\bar{L}/\bar{K}$ הרחבה, $\bar{L}$ סגור אלגברית. אז θ_0 ניתן להרחבה לשיכון $\theta_L : \bar{L} \rightarrow \bar{L}$.

3. אם $L, \bar{L}$ סגורים אלגבריים של K אז $L \equiv_K \bar{L}$.

הוכחה.

1. הוכחנו שיעור קודם. M קבוצה גדולה מספיק. $K \subseteq M$

$$\Omega = \{(L, f) | K \subseteq L \subseteq M, \text{ שדה } (L, f), (L, f)/K\}$$

$$(L, f) \prec (L', f')$$

אז (L, f) מקסימלי גורר L סגור אלגברי.

2. כמו סעיף קודם. M, Ω כמו קודם.

$$\Omega' = \{(L, f, \theta) | (L, f) \in \Omega, \theta : L \rightarrow \bar{L} \text{ שייכון שמרחיב את } \theta_0\}$$

אז $\Omega' \neq \emptyset$ כי $(K, f_K, \theta_0) \in \Omega'$. נגדיר: $(L, f, \theta) \prec (L', f', \theta')$ אם (L', f') מרחיב את (L, f) ו- θ' מרחיב את θ .

זה יחס סדר חלקי. לכל שרשרת $\{(L_i, f_i, \theta_i)_{i \in I}\}$ ב- Ω' יש חסם מלעיל

$$(\bigcup_{i \in I} L_i, \bigcup_{i \in I} f_i, \bigcup_{i \in I} \theta_i)$$

לפי צורן יש (L, f, θ) מרבי.

טענה. (L, f) סגור אלגברי.

ואכן, נניח שיש $p \in L[x]$ ממעלה $1 \geq$ שאין לו שורש ב- L . אז יש הרחבה $L' \equiv_L L[x]/(p)$ של L , כך של- p יש שורש ב- L' . בה"כ $(L', f') \in \Omega$ כמו ב- α . איזומורפיזם $\theta : L \rightarrow \theta(L)$ משרה איזומורפיזם $\hat{\theta} : \bar{L} \rightarrow \bar{\theta(L)}$. סגור אלגברית לכן ל- $\theta(p)$ יש בו שורש $\alpha \in \bar{L}$.

$$\begin{array}{ccccccc} L' & \cong & L[x]/(p) & \xrightarrow{\hat{\theta}} & \theta(L)[x]/(\theta(p)) & \xrightarrow{\rho} & \theta(L)(\alpha) \subseteq \bar{L} \\ \uparrow & & \uparrow & & | & & | \\ L & = & L & \xrightarrow{\theta} & \theta(L) & = & \theta(L) \subseteq \bar{L} \end{array}$$

$(L, f, \theta) \not\preceq (L', f', \theta') \in \Omega'$ בסתירה למרביות.

3. יהי $\bar{K} = K$ לפי סעיף קודם יש שיכון $K : L \rightarrow \bar{L}$. נראה ש- θ על. כמובן $\bar{L} = \theta(L)$ לכן $\theta(K) \subseteq \bar{L}$ סגור אלגברי של K . $L \cong_k \theta(L)$, $K \subseteq S(L) \subseteq \bar{L}$

□

מסקנה. יהי $\tilde{K}$ סגור אלגברי של K . יהי $K \subseteq L \subseteq \tilde{K}$ שדה. יהי $G : L \rightarrow \tilde{K}$ שיכון- K . אז G ניתן להרחבה לאוטומורפיזם של $\tilde{K}$.

הוכחה. לפי 2 עם $\tilde{K}/L$ במקום L/K ו- $\tilde{L}/\tilde{K}$ במקום $\bar{L}/\bar{K}$ אז G ניתן להרחבה לשיכון $G : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ כמו במסקנה $G(\tilde{K}) = (\tilde{K})$. □

למה. תהי F/K הרחבת שדות. אז יש לכל היותר סגור אלגברי אחד שלא בתוך F .

הוכחה. α אלגברי מעל $K = \{\alpha \in F\}$ לפי מסקנה L' שדה $K \subseteq L' \subseteq K'$ אז L'/K אלברית. אם $L \subseteq F$ סגור אלגברי של K אין $L \subseteq L'$ לכן $L = L'$. □

הרחבות נורמליות

K שדה, $\tilde{K}$ סגור אלגברי.

הגדרה. $f \in K[x]$ מתפצל מעל K אם $f = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$ אם $c \in K^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

כל פולינום מתפצל מעל שדה סגור אלגברית. תהי $F \subseteq K[x]$. הרחבה L/K היא שדה פיצול של F מעל K אם כל $f \in F$ מתפצל מעל L ו- L נוצר מעל K ע"י השורשים של איברי F ב- L .

קיום ויחידות: יהי L השדה הנוצר ב- $\tilde{K}$ ע"י כל שורשי $f \in F$ בתוך $\tilde{K}$ מעל K . אז L שדה פיצול של F מעל K וברור שהוא יחיד.

אומרים שהרחבה L/K היא נורמלית אם לכל $p \in K[x]$ אי פריק מתקיים: אם ל- p יש שורש ב- L אז p מתפצל מעל L .

דוגמא. כל הרחבה ריבועית L/K היא נורמלית. (אם L/K ריבועית אם $[L : K] = 2$).
אכן יהי $p \in K[x]$ אי פריק שיש לו שורש $\alpha \in L$. אז $p = (x - \alpha)q$. כאשר $q \in L[x]$. צ"ל q מתפצל מעל L . אם במקרה $\deg p \leq 2$ אז $\deg q \leq 1$ ואז ברור. כעת, $K \subseteq K(\alpha) \subseteq L$, לכן $\deg p \leq [K(\alpha) : K] \leq [L : K] = 2$.
 $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}/\mathbb{Q}]$ אינה נורמלית. $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ אי פריק אבל יש שורש לא ממשי ל- p .
 $p \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ לכן $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$