

אלגברה ב' 2 – הרצאה 8

16.03.11

מסקנה. תהי L/K הרחבה.

1. אם L/K סופית אז L/K אלגברית.

2. L/K סופית $\Leftrightarrow L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ אלגבריים מעל K .

הוכחה.

1. יהי $\alpha \in L$. נראה ש- $[K(\alpha) : K] < \infty$. מתקיים $K \subset K(\alpha) \subset L$, $[L : K] < \infty$, ולכן לפי נוסחאת המכפלה $[K(\alpha) : K] < \infty$.

2. $\Leftarrow$: יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ בסיס של L מעל K אז

$$K[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L$$

לפי הסעיף הקודם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ אלגבריים מעל K .

$\Rightarrow$: נסמן $L_0 = K$, $L_i = K(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ $i = 1, \dots, n$ אז $K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n = L$

די להראות $[L_i : L_{i-1}] < \infty$ לכל $i = 1, \dots, n$. אבל $L_i = L_{i-1}(\alpha_i)$ ו- α_i אלגברי מעל K ולכן, בפרט, מעל L_{i-1} לכן $[L_i : L_{i-1}] < \infty$.

□

מסקנה. תהי L/K הרחבה. $\alpha_1, \alpha_2 \in L \setminus \{0\}$ אלגבריים אז $\alpha_1 \pm \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ אלגבריים מעל K .

הגדרה. אם $L_1, \dots, L_r \subseteq L$ תת-שדות אז הצירוף של $L_1, \dots, L_r$ בתוך L הוא התת-שדה הקטן ביותר של L שמכילה את $L_1, \dots, L_r$. מסומן: $L_1 L_2 \dots L_r$.

דוגמא.

$$K(\alpha_1)K(\alpha_2) \dots K(\alpha_r) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

משפט. $K \subseteq L, F \subseteq M$. שדות.

1. M/K סופית $\Leftrightarrow M/L, L/K$ סופיות.

2. אם L/K סופית אז LF/F סופית.

3. אם L/K וגם F/K סופיות אז LF/K סופית.

כ"ל עם אלגברית במקום סופית.

הוכחה. עבור סופיים

1. $[M : K] = [M : L][L : K]$ אם שניהם סופיים אז המכפלה סופית ואם המכפלה סופית אז שניהם חייבים להיות סופיים.

2. L/K סופית לכן יש $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ אלגבריים מעל K כך ש-

$$L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$LF = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

ו- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ אלגבריים מעל F לכן LF/F סופית.

3. נובע מהשניים הראשונים.

עבור אלגבריים:

1. $\Leftarrow$: ברור מההגדרה. $\Rightarrow$: יהי $\alpha \in M$. אז α אלגברי מעל L . לכן $\text{irr}(\alpha, L) \in L[x]$ ויהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ המקדמים של $\text{irr}(\alpha, L)$. אז α אלגברי מעל $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ אלגבריים מעל K לכן $[K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : K] < \infty$

$$[K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(\alpha) : K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] < \infty$$

ההרחבה $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(\alpha)/K$ סופית לכן α אלגברי מעל K .

2. $\bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L} F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subseteq FL$ הוא שדה כי

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cup F(\beta_1, \dots, \beta_m) \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$$

כאשר $\alpha_i, \beta_j \in L$. מצד שני השדה הזה מכיל את F ואת L כי $F(\alpha)$ מכיל את α לכל $\alpha \in L$. לכן שווה ל- FL .

כל $\alpha \in FL$ נמצא ב- $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ עבור $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ מתאימים. לכן די להראות $[F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F] < \infty$. ואכן $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ אלגבריים מעל K לכן מעל שדה יותר גדול F ולכן לפי המסקנה $[F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F] < \infty$.

3. נובע מהשניים הראשונים.

□

הסגור האלגברי

למה. יהי $\alpha \in K, f \in K[x]$ אז $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x - \alpha \mid f$ ב- $K[x]$.

הוכחה. $\Rightarrow$:

$$f(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0 \text{ אז } g \in K[x], f = (x - \alpha)g$$

$\Leftarrow$: חילוק עם שארית: $f = (x - \alpha)\dot{g} + r$ כדומר $\deg r < 1$ $r \in K$

$$0 = f(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) + r(\alpha) = r$$

$$f = (x - \alpha)g \text{ כדומר } x - \alpha \mid f$$

□

מסקנה. לכל $f \in K[x]$ יש לכל היותר $\deg f$ שורשים ב- K .

הוכחה. ל- f יש לכל היותר $\deg f$ גורמים אי פריקים שונים ממעלה 1. $\square$

תרגיל. תהי E/K אלגברית. אז $|E| \leq \kappa := \max(|K|, \aleph_0)$.

הוכחה. קבוצת כל הפולינומים המתוקנים ממעלה n מעל K היא בעלת עוצמה $|K|^n$. לכן, עצמת קבוצת כל הפולינומים המתוקנים היא $K = \aleph_0 \cdot L \geq$. לכל $f \in K[x]$ מתוקן תהי R_f קבוצת שורשיו ב- E . אז R_f סופית ולכן $E = \bigcup_f R_f$. לכן, $|E| \leq K \cdot \aleph_0 = K$ כנדרש. $\square$

הגדרה. שדה L נקרא סגור אלגברית אם לכל פולינום ממעלה ≥ 1 יש שורש ב- L .

הגדרה. שדה L נקרא סגור אלגברי של K אם L הרחבה אלגברית של K ו- L סגור אלגברית.

דוגמא. $\mathbb{C}$ סגור אלגברית. $\mathbb{C}$ הוא סגור אלגברי של $\mathbb{R}$.

למה. שדה K הוא סגור אלגברית $\Leftrightarrow$ אין ל- K הרחבה אלגברית L/K כך ש- $L \neq K$.

הוכחה. $\Leftarrow$ נניח K סגור אלגברית. תהי L/K אלגברית, צ"ל $L = K$. יהי $\alpha \in L$ אז הוא אלגברי מעל K . צ"ל $\alpha \in K$. אז $f = \text{irr}(\alpha, K) \in K[x]$ הוא בעל שורש ב- K נסמנו $\beta \in K$. אז $x - \beta \mid f$ אבל f אי פריק לכן $f = x - \beta$ לכן $\alpha = \beta$ ו- $\alpha \in K$ לכן $\alpha \in K$. $\Rightarrow$ נרצה להראות ש- K סגור אלגברית. יהי $f \in K[x]$ ממעלה ≥ 1 . צ"ל ל- f יש שורש ב- K . בה"כ f אי פריק, אחרת ניקח גורם אי פריק של f (ואם נראה שלגורם יש שורש אז גם ל- f).

למדנו שיש הרחבה סופית $L = K[x]/(f)$ של K בה יש ל- f שורש. L/K סופית לכן אלגברית $L = K$ ולכן ל- f שורש ב- K . $\square$

הגדרה. שיכון הוא הומומורפיזם חח"ע (מונומורפיזם).

משפט.

1. ל- K יש סגור אלגברי L .

2. אם $\theta : K \rightarrow \bar{K}$ שיכון של שדות ו- $\bar{L}/\bar{K}$ הרחבה כך ש- $\bar{L}$ סגור אלגברית, אז ניתן להרחיב את θ לשיכון $\bar{L} \rightarrow \bar{L}$.

3. אם $\bar{L}$ סגור אלגברי נוסף של K אז $\bar{L} \cong_K \bar{K}$.

הוכחה.

1. ניקח M קבוצה כלשהי שמכילה את K כקבוצה, כך ש- $\max\{|K|, \aleph_0\} < |M|$. אם $L \subseteq M$ תת קבוצה, פונקציה $f : L \times L \rightarrow L \times L$ מגדירה שתי פעולות בינאריות: $f(a, b) = (a + b, a \cdot b)$. אם במקרה L שדה ביחס לפעולות אלה ו- K תת שדה שלו נאמר כי (L, f) שדה בתוך M .

תהי λ משפחה של כל השדות (L, f) בתוך M שהם הרחבה אלברית של K . גם הוא: $K = (K, f_0)$ מוגדר ע"י f_0 ו- f מרחיב את f_0 שמגדירה חיבור וכפל על L והרחבה אלגברית.

נגדיר יחס סדר חלקי על λ . $(L, f) \prec (L', f')$ אם (L', f') הרחבה של (L, f) . כלומר אם $L \subseteq L'$ וכן f' מרחיבה את f .

ניתן לוודא כי זה יחס סדר חלקי. נרצה להשתמש בלמה של צורן. נניח $\{(L_i, f_i)\}_{i \in I}$ שרשרת ב- λ אז יש לה חסם מלעיל והא $(\bar{L}, \bar{f}) := (\bigcup_{i \in I} L_i, \bigcup_{i \in I} f_i) \in \lambda$.

הערה. אם $L = \bigcup_{i \in I} L_i$ אז $L \times L = \bigcup_{i \in I} L_i \times L_i$ ואפשר להגדיר $f : L \times L \rightarrow L \times L$ באופן הבא: $f(a, b) = f_i(a, b)$ כאשר $i \in I$ כך ש- $a, b \in L_i$. זאת הגדרה טובה ומסמנים $f = \bigcup_{i \in I} f_i$.

ואז לפי הלמה של צורן יש (L, f) איבר מקסימלי. נשים לב כי אכן אפשר להשתמש בלמה: המשפחה λ לא ריקה כי $\lambda \in K = (K, f_0)$.

טענה. $L = (L, f)$ סגור אלגברית (לכן הוא סגור אלגברי של K כי הוא הרחבה אלגברית).

הוכחה. בשלילה נניח יש $p \in L[x]$ ממעלה $1 \geq$ שאין לו שורש. כמו קודם, בה"כ p אי פריק (אחרת ניקח גורם אי פריק של p). ראינו שיש הרחבה של L , L' כל ש- $L' \cong_L L[x]/(p)$ בה יש ל- p שורש. $L \subsetneq L'$ כי ב- L אין ל- p שורש וב- L' יש.

כמו כן, L'/L אלגברית כי סופית, L/K אלגברית ולכן לפי משפט L'/K אלגברית.

אם $L' \subseteq M$ אז תהי $f' : L' \times L' \rightarrow L' \times L'$ הופנקציה שמגדירה את $+$, ב- L' .

אם $L' \subseteq M$ אז $(L', f') \prec (L, f)$, $L' \neq L$ בסתירה למקסימליות (L, f) .

ואכן בה"כ $L \subseteq M$ כי $|M \setminus L| = |M| - |L| = \kappa < |L| \leq |L'| \leq |L'/L|$ ולכן אפשר למצוא עותק שקול של L' בתוך M . $\square$

$\square$