

אלגברה ב' 2 - הרצאה 5

07.03.11

פולינומים סימטריים

יהי A חוג חילופי עם יחידה. יהי $R = A[x_1, \dots, x_n]$. חבורות התמורות S_n פועלת על $\{X_1, \dots, X_n\}$ זה נותן פעולה של S_n על R . אם $\sigma \in S_n$

$$\sigma\left(\sum_{m=(m_1, \dots, m_n)} a_m x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}\right) = \sum_m \sigma(x_1)^{m_1} \dots \sigma(x_n)^{m_n}$$

ברור ש- $\tau(\sigma(f)) = (\tau\sigma)(f)$ וכן $1(f) = f$ כלומר זוהי פעולה.

הערה. אם $\sigma \in S_n$ אז $\sigma(f) \mapsto f$ הוא אוטומורפיזם $R \rightarrow R$. אכן זהו הומומורפיזם (תרגיל) ויש לו הומומורפיזם הפוך $f \mapsto \sigma^{-1}(f)$.

הגדרה. נאמר ש- $f \in R$ סימטרי אם $\sigma(f) = f$ לכל $\sigma \in S_n$.

$\{f \in R \mid f \text{ סימטרי}\}$ זהו תת-חוג של R מכיל את A .

דוגמאות. $s_1 = x_1 + \dots + x_n$ סימטרי. $s_2 = \sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{\{i,j\}, |\{i,j\}|=2} x_i x_j$ סימטרי. $s_3 = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = \sum_{\{i,j,k\}, |\{i,j,k\}|=3} x_i x_j x_k$ סימטרי.

$\vdots$

$$s_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

הפולינומים האלה נקראים: הפולינומים הסימטריים היסודיים.

דוגמא. $x_1^k + \dots + x_n^k$ $k \in \mathbb{N}$.

דוגמא. אם $g \in A[x_1, \dots, x_n]$ כלשהו אז $g(S_1, \dots, S_n)$ סימטרי.

הערה. אם ניקח $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$

$$\begin{aligned} (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) &= \\ &= x^n - s_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)x^{n-1} + s_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)x^{n-2} + \dots + (-1)^n s_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

הגדרה. נגדיר עבור $f \in R$ המשקל של f : אם $f = a_m x_1^{m_1} \cdot x_n^{m_n}$ אז $a_m \neq 0$ ו- $\deg f = m_1 + \dots + m_n$ ו- $w(f) = m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n$ הוא סכום של מונומים כאלה אז $\deg f, w(f)$ הוא מקסימום של המעלות או המשקלים של המונומים. כאשר $f = 0, \deg(0) = w(0) = -\infty$.

הערה. $\deg(f), w(f)$ אינם תלויים ב- n . כלומר, הסימטריה הייתה תלויה ב- n כי אם היינו מסתכלים על סימטרי ביותר משתנים הייתה בעיה. כאן זה לא משנה.

הערה. יהי $g \in R$ אז $\deg g(s_1, \dots, s_n) \leq w(g)$. נניח $g = \sum_m a_m x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ אבל אז $a_m \neq 0$ ו- $m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n \leq d$ אז $a_m s_1^{m_1} \dots s_n^{m_n} = a_m (x_1 + \dots + x_n)^{m_1} \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x_1 \dots x_n)^{m_n}$ זהו סכום של מונומים ממעלה $d \geq m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n$ ולכן גם $g(s_1, \dots, s_n)$ כולו סכום של מונומים ממעלה $d \geq$ ולכן $\deg g(s_1, \dots, s_n) \leq d$.

משפט. יהי $f \in R$ סימטרי ממעלה d . אז יש $g \in R$ כך ש- $w(g) \leq d$ ו- $g(s_1, \dots, s_n) = f$.

הוכחה. באינדוקציה כפולה:

באינדוקציה על n : עבור $n = 1$ ניקח $f = f(x_1)$ אז $g = f$ ו- $w(g) = \deg f = d$.
 נניח שהמשפט נכון עבור $n - 1$: נסמן $R_0 = A[x_1, \dots, x_{n-1}]$. לכל פולינום $f \in R$ נגדיר $(f)_0 \in R_0$: $(f)_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ אז $f \mapsto (f)_0$ הוא הומומורפיזם של חוגים $R \rightarrow R_0$.

כמו כן, אם $f \in R$ סימטרי אז $(f)_0 \in R_0$ סימטרי ב- R_0 .
 ולבסוף $(s_1)_0, \dots, (s_{n-1})_0$ אלה הם הפולינומים הסימטריים היסודיים ב- R_0 . $(s_n)_0 = 0$.
 ההמשך הוא באינדוקציה על $d = \deg f$. אם $d \leq 0$ אז $f \in A$ נגדיר $g = f$.
 נניח שהמשפט נכון לפולינומים ב- R ממעלה $d > 0$. לפי הנחת האינדוקציה על n יש $g_0 \in R_0$ כך ש- $w(g_0) \leq \deg(f)_0 \leq d$.

$$(f)_0 = g_0((s_1)_0, \dots, (s_{n-1})_0) = (g_0(s_1, \dots, s_{n-1}))_0$$

$f' := f - g_0(s_1, \dots, s_{n-1}) \in R$ סימטרי (לפי הערה). לכן $g_0(s_1, \dots, s_{n-1}) \in R$ סימטרי ו- $\deg f' \leq d$. אבל כעת

$$(f')_0 = f'(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = (f)_0 - (g_0(s_1, \dots, s_{n-1}))_0 = 0$$

לכן $x_n | f'$. כיוון ש- f' סימטרי גם $x_1, \dots, x_n | f'$ לכן $x_1 \dots x_n | f'$ ואז $f' = x_1 \dots x_n \cdot f_1$ עבור $f_1 \in R$.
 $\square$