

אלגברה ב' 2 – הרצאה 25

30.5.11

תרגיל. תהי K'/K אלגברית, ונניח שלכל $f \in K[x]$ ממעלה $1 \leq$ יש שורש ב- K' . הוכח K' סגור אלגברי של K .

פתרון. זו הרחבה אלגברית, צ"ל שסגור אלגברית. יהי $\tilde{K}$ סגור אלגברי של K' . הוא גם סגור אלגברי של K כי K'/K אלברית. צ"ל $\tilde{K} = K'$. יהי $\gamma \in \tilde{K}$. יהי L הסגור הנורמלי של $K(\gamma)$ מעל K . די להוכיח כי $L \subseteq K'$ (כי אז $L \subseteq K' \subseteq \tilde{K} = K'$).
 L/K נורמלית סופית. צ"ל $L \subseteq K'$. יהי F הסגור הפריד של K בתוך L . יש $K \subseteq E \subseteq L$ כך ש- E/K אי פרידה טהורה, כך ש- $EF = L$. די להוכיח $E \subseteq K'$. יהי $\alpha \in E$ אזי $\text{irr}(\alpha, K) = x^{p^r} - a \in K[x]$ בעל שורש יחיד α . לפי ההנחה $\alpha \in K'$.
 $F \subseteq K'$ נשים לב כי F/K נורמלית. ואמנם, $F = \{\alpha \in L : K \text{ מעל } \alpha\}$ פריד מעל K . יהי σ אוטומורפיזם של $\tilde{K}$. אז כיוון ש- L/K נורמלית, $\sigma(L) = L$. אבל אם $\alpha \in L$, אזי α פריד $\Leftrightarrow \sigma(\alpha)$ פריד. לכן $\sigma(F) = F$. לכן F/K נורמלית. ממשפט האיבר הפרימיטיבי יש $\alpha \in F$ כך ש- $F = K(\alpha)$. לפי ההנחה יש שורש α' של $\text{irr}(\alpha, K)$. יש אוטומורפיזם של K של $\tilde{K}$ כך ש- $\sigma(\alpha) = \alpha'$. לכן

$$\alpha \in F = \sigma(F) = \sigma(K(\alpha)) = K(\sigma(\alpha)) = K(\alpha') \subseteq K'$$

לכן $\alpha \in K'$ ומכאן $F \subseteq K'$.

הרחבות טרנסצנדנטיות

תהי L/K הרחבת שדות.

הגדרה. קבוצה $T \subseteq L$ נקראת בלתי תלויה אלגברית (בת"א) מעל K אם לכל $t_1, \dots, t_n \in T$ שונים זה מזה ולכל $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ מתקיים $f(t_1, \dots, t_n) \neq 0$.

למה צריך $t_1, \dots, t_n$ שונים? אחרת ניקח $t_1 = t_2$, $f = x_2 - x_1$, $t_1 = t_2$, $f(t_1, t_2) = 0$.

הערה. תהי X קבוצת משתנים ויהי $K[X]$ חוג הפולינומים במשתנים אלה. נניח $X = \{x_i : i \in I\}$

$$M = \left\{ m = \prod_{i \in I} x_i^{n_i} : n_i \geq 0 \text{ כמעט לכל } i \right\}$$

$$K[X] = \left\{ \sum_{m \in M} a_m \cdot m : a_m = 0 \text{ כמעט לכל } m, a_m \in K \right\}$$

1. אם $\lambda : X \rightarrow L$ העתקה כלשהי, ניתן להרחיבה באופן יחיד להומומורפיזם של חוגים

$$\lambda' : K[X] \rightarrow L, \text{ כך ש- } \lambda'(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)) \in L$$

2. נניח ש- L המקורית היא חח"ע. אז $\lambda' \text{ חח"ע} \Leftrightarrow \lambda(X) \subseteq L$ בת"א מעל K . אם זה קורה, נסמן $T = \lambda(X)$, אז $K[T] \cong_K K[X]$, כלומר אפשר לזהות את T עם משתנים מעל K .

תרגיל. תהי T בת"א מעל K .

1. אם $S \subseteq T$ אז S בת"א מעל K .

2. אם $t \in T$ אז t טרנסצנדנטי מעל K .

3. תהי $S \subseteq L$. אז S בת"א מעל $K(T)$ אם ורק אם $S \cap T = \emptyset$ וכן $T \cup S$ בת"א מעל K .

הוכחה.

1. מכך שנעיף את המשתנים המיותרים מהפולינום שמאפס (כלומר לא נשתמש בהם).

2. מסעיף קודם.

3. $\Leftarrow$ איברי S אינם אלגבריים מעל $K(T)$ ולכן אינם ב- $K(T)$ ובפרט $S \cap T = \emptyset$.

יהיו $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ שונים. נכתוב $X = (X_1, \dots, X_m)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ נסמן $(s_1, \dots, s_n)$ יהיו $f \in K[X, Y]$ כך ש- $f(t, s) = 0$. צ"ל $f = 0$. אזי $a_{ij} \in K$ כמעט כולם 0 נציב: $f = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n)} \sum_{j=(j_1, \dots, j_n)} a_{ij} X^i Y^j$

$$0 = f(t, s) = \sum_j \left(\sum_i \underbrace{a_{ij} t^i}_{\in K(T)} \right) s^j$$

לכן המקדמים $\sum_i a_{ij} t^i = 0$ לכל j . אבל T בת"א מעל K ולכן $a_{ij} = 0$ לכל i, j ולכן $f \equiv 0$.

$\Rightarrow$ יהיו $s_1, \dots, s_n \in S$ שונים, נסמן $s = (s_1, \dots, s_n)$. יהי $g \in K(T)[Y]$, $g \in K(T)[Y]$ כמו קודם, כך ש- $g(s) = 0$. צ"ל $g = 0$. בה"כ $g \in K[T][Y]$ כלומר יש f כמו קודם כך ש- $f(t, Y) = g(Y)$. נתון $f(t, s) = 0$ לכן $f = 0$. לכן גם $g = 0$.

□