

אלגברה ב' 2 – הרצאה 23

23.5.11

בפעם שעברה דיברנו מתי $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ בניה מתוך נתוני פתיחה P אם ורק אם יש מגדל

$$K = \mathbb{Q}(P) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = K$$

$$[K_i : K_{i-1}] = 2 \text{ לכל } i.$$

ראינו גם תנאי הכרחי: אם $K = \mathbb{Q}(P)$ אז $[K(a, b) : K]$ חזקה של 2.

מסקנה. אי אפשר לבנות בעזרת סרגל ומחוגה:

1. קוביה בעלת נפח כפול מקוביה נתונה (לפעשה נתונה צלע וצריך לבנות צלע באורך $\sqrt{2}$ מפנה).

2. אי אפשר לרבע מעגל (כלומר לבנות נקודה $(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, 0)$).

3. לחלק זווית של $\pi/3$ ל- שלוש זוויות שוות.

הוכחה. נניח בשלילה שכן.

1. בה"כ הקוביה הנתונה בעלת צלע A, B , $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $P = (A, B)$. מהנחת השלילה, אפשר לבנות $(\sqrt[3]{2}, 0)$. אם $K = \mathbb{Q}(P) = \mathbb{Q}$ אז $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ חזקה של 2. אבל $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$, סתירה.

2. באופן דומה $[\mathbb{Q}(\frac{1}{\sqrt{\pi}}) : \mathbb{Q}]$ חזקה של 2. בפרט כיוון ש- $\pi \in \mathbb{Q}(\frac{1}{\sqrt{\pi}})$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\frac{1}{\sqrt{\pi}})$. לכן $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}]$ חזקה של 2. אבל π טרנסנדנטי מעל $\mathbb{Q}$ אז $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] = \infty$, סתירה.

3. בה"כ הזווית היא BOA . הראשית, $O = (1, 0)$, $A = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. לפי הנחת השלילה אפשר לבנות את הנקודה $(\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9})$. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. אז $[\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$ חזקה של 2. בפרט, $[\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9}) : \mathbb{Q}]$ חזקה של 2. $\zeta_{18} = e^{2\pi i/18} = e^{\pi i/9} = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$. לכן גם $[\mathbb{Q}(\zeta_{18}) : \mathbb{Q}]$ חזקה של 2. סתירה כי $[\mathbb{Q}(\zeta_{18}) : \mathbb{Q}] = \varphi(18)$.

□

משפט. יהיו P נתוני פתיחה, נסמן $K = \mathbb{Q}(P)$. אז נקודה $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ניתן לבנות מתוך P אם ורק אם $K(a, b)/K$ הרחבת גלואה של L/K יש גלואה כך ש- $\text{Gal}(L/K)$ חזקה של 2 ו- $a, b \in L$. בה"כ L סגור גלואה של $K(a, b)/K$.

מסקנה. (גאוס)

ניתן לבנות מצולע משוכלל בן n צלעות $\Leftrightarrow \varphi(n)$ היא חזקה של 2.

הוכחה. אם O המרכז של המצולע ו- AB צלע שלו, אז $\angle AOB = 2\pi/n$. המצולע ניתן לבנייה אם ורק אם זווית AOB ניתנת לבנייה אם ורק אם $(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n})$ ניתנת לבנייה. לפי המשפט זה שקול ל- $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n})/\mathbb{Q}$ הרחבת 2. אבל זה שקול ל- $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}, i)/\mathbb{Q}$ הרחבת 2 (כי צירוף של שתי הרחבות 2 היא הרחבת 2 וכן כל תת הרחבה של הרחבת 2 היא הרחבת 2).

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n}, \quad \zeta_n \bar{\zeta}_n = |\zeta_n|^2 = 1, \quad \text{לכן } \bar{\zeta}_n = \zeta_n^{-1}$$

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_n^{-1}) = \mathbb{Q}(\zeta_n, \bar{\zeta}_n)$$

$$\mathbb{Q}(\zeta_n, i) = \mathbb{Q}(\zeta_n, \bar{\zeta}_n, i) = \mathbb{Q}(\operatorname{Re} \zeta_n, \operatorname{Im} \zeta_n, i) = \mathbb{Q}\left(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}, i\right)$$

לכן $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}, i)/\mathbb{Q}$ הרחבת 2 אם ורק אם $\mathbb{Q}(\zeta_n, i)/\mathbb{Q}$ היא הרחבת 2, וזה אם ורק אם $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ היא הרחבת 2, וזה אם ורק אם $[\mathbb{Q}(\zeta_n)L:\mathbb{Q}]$ חזקה של 2 וזה אפ ורק אם $\varphi(n)$ הוא חזקה של 2. $\square$

מי זה בדיוק זאת שאלה פתוחה.
נוכיח את המשפט:

הוכחה. $\Leftarrow$: לפי ההנחה יש מגדל $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_k$, $a, b \in K$. בפרט, $K \subseteq K(a, b) \subseteq K_k$. K_i/K_{i-1} הרחבת 2 לכל i . לפי משפט K_k/K_0 היא הרחבת 2. $K \subseteq K(a, b) \subseteq K_k$ לכן לפי אותו המשפט $K(a, b)/K$ הרחבת 2. $\Rightarrow$: לפי ההנחה יש L כנ"ל. נסמן $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ אז G חבורת 2. כידוע יש סדרה $G = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_k = 1$ כאשר G_i/G_{i+1} חבורה מסדר 2. יהי $K_i = L^{G_i}$. אז

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_k = L$$

$\square$ כאשר $[K_i : K_{i-1}] = |G_{i-1}/G_i| = 2$ לכן (a, b) ניתנת לבנייה.