

אלגברה ב' 2 - הרצאה 15

11.4.11

נמשיך מהשיעור הקודם. נותר להוכיח שהעתקת הצמצום היא חבורת גלואה: $\text{Gal}(L/F) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ (על $\text{Gal}(L/K)$ בתנאי $K = L \cap F$). נסמן, ב- H את התמונה. יהי $\alpha \in L^H \subseteq L$ כלומר $\sigma(\alpha) = \alpha$ לכל $\sigma \in H$. לכן $\sigma(\alpha) = \alpha$ לכל $\sigma \in \text{Gal}(LF/F)$. זה אומר ש- $\sigma \in (LF)^{\text{Gal}(LF/F)} \cap LF \cap L = K$. לכן, $L^H = K$. אם H סופית אז $H = \text{Gal}(L/K)$. בפרט, זה נכון אם L/K הרחבה סופית. במקרה הכללי L/K אינה סופית אז $L = \bigcup_{i \in I} L_i$ כאשר $L_i \subseteq L$ הרחבת גלואה סופית של K . מדוע? אם לא היינו דורשים נורמליות אז זה בסדר. מדוע אפשר להניח נורמליות (גלואה)? אם לא, ניקח את הסגור גלואה, זה קבוצות קצת יותר גדולות, אבל מוכלות ב- L ואז בסדר. אז $LF = \bigcup_{i \in I} (L_i F)$. יהי $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$. אז לכל $i \in I$, $\sigma|_{L_i}$ בדומה למקרה הסופי זה ניתן להרחבה ל- $\tau_i \in \text{Gal}(L_i F/F)$. לא סתם הרחבה אלא יש τ יחיד כזה (כי הצמצום במקרה הסופי הוא איזומורפיזם). אם $L_i \subseteq L_j$ אז $\tau_j|_{L_i} = \tau_i$ בגלל היחידות (שניהם מרחיבים את $\sigma|_{L_i}$). נגדיר $\tau : LF \rightarrow LF$ באופן הבא: $\tau(\beta) = \tau_i(\beta)$ אם $\beta \in L_i F$. ההגדרה טובה, τ הומומורפיזם, ו- $\tau|_{L_i} = \sigma|_{L_i}$ לכן $\tau|_L = \sigma$. $\square$

תרגיל. אם $\pi_2 : G_2 \rightarrow G_0$, $\pi_1 : G_1 \rightarrow G_0$ הומומורפיזמים של חבורות. אז $G_1 \times_{G_0} G_2 := \{(\sigma_1, \sigma_2) \in G_1 \times G_2 : \pi_1(\sigma_1) = \pi_2(\sigma_2)\} \subseteq G_1 \times G_2$ היא תת חבורה.

משפט. תהייה $L_1/K, L_2/K$ הרחבות גלואה אז:

1. $L_1 L_2 / K$ גלואה.

2. $L_1 \cap L_2 / K$ גלואה.

3. $\text{Gal}(L_1 L_2 / K) \cong \text{Gal}(L_1 / K) \times_{\text{Gal}(L_1 \cap L_2 / K)} \text{Gal}(L_2 / K)$ ע"י צמצומים.

הוכחה.

1. הוכחנו בעבר במילים אחרות.

2. הוכחנו בעבר במילים אחרות.

3. נסמן $L = L_1 L_2$. נגדיר העתקה $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(L_1/K) \times \text{Gal}(L_2/K)$ ע"י $\sigma \mapsto (\sigma|_{L_1}, \sigma|_{L_2})$. זהו הומומורפיזם ותמונתו בתוך $\text{Gal}(L_1/K) \times \text{Gal}(L_1 \cap L_2 / K)$ הגרעין הוא $\text{Gal}(L_2/K)$.

$$\begin{aligned} \{\sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma|_{L_1} = id_{L_1}, \sigma|_{L_2} = id_{L_2}\} &= \\ &= \{\sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma|_{L_1 L_2} = id\} = \{id_L\} \end{aligned}$$

לכן ההומומורפיזם חח"ע. נראה שהוא על. יהיו $\sigma_1 \in \text{Gal}(L_1/K)$, $\sigma_2 \in \text{Gal}(L_2/K)$ כך ש- $\sigma_1|_{L_1 L_2} = \sigma_2|_{L_1 \cap L_2}$. אפשר להרחיב את σ_1 ל- $\tilde{\sigma} \in \text{Gal}(L/K)$. $(\tilde{\sigma}|_{L_2})^{-1} \sigma_2 \in \text{Gal}(L_2/L_1 \cap L_2)$. אפשר להרחיב ל- $\tau \in \text{Gal}(L_2/K)$ כך $\tilde{\sigma}|_{L_1 \cap L_2} = \sigma_1|_{L_1 \cap L_2} = \sigma_2|_{L_1 \cap L_2} = \tau|_{L_1 \cap L_2}$. אז $\sigma|_{L_1} = \tau|_{L_1}$. $\sigma = \tilde{\sigma} \tau \in \text{Gal}(L/K)$ יהי יחיד. $\text{Gal}(L/L_1) \leq \text{Gal}(L/K)$ ואילו $\tilde{\sigma}|_{L_1} \tau|_{L_1} = \sigma_1 id_{L_1} = \sigma_1$.

□

רוצים להראות:

משפט. $\mathbb{C}$ סגור אלגברית.

בשביל זה $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ ו-

1. $\mathbb{R}$ שדה סדור: יש $P \subseteq \mathbb{R}$ (האיברים החיוביים) המקיימת, P סגורה תחת חיבור וכפל, $\mathbb{R} = P \uplus -P \uplus \{0\}$.

הערה. לאיברי P נקרא חיוביים ולאברי $-P$ נקרא שליליים. אם $a \in P$, $b \in -P$ אז $ab \in -P$, כי אז $b = -c$, $c \in P$ ולכן $ab = -ac \in -P$.
הערה. סכומים של ריבועים הם חיוביים.

2. כל איבר חיובי הוא ריבוע ב- $\mathbb{R}$.

3. לכל $f \in \mathbb{R}[x]$ ממעלה, אי זוגית יש שורש ב- $\mathbb{R}$.

טענה. כל $z \in \mathbb{C}$ הוא ריבוע ב- $\mathbb{C}$. אכן, יהי $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. צריך למצוא $c, d \in \mathbb{R}$ כך ש- $(c + di)^2 = a + bi$. כלומר $(c^2 - d^2 + i(2cd)) = a + bi$. לכן $c^2 - d^2 = a$, $2cd = b$. לזה יש פתרון. $d^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, $(*)c^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. כי אז $4c^2 d^2 = b^2$.
וצריך לבחור את סימנים של c, d כך ש- $2cd = b$.

הערה. האגפים הימניים הם חיוביים או 0. אכן אם נסמן $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ אז $\alpha \in P$ או $\alpha = 0$ אז $a^2 + b^2 = \alpha^2 \geq 0$ ולכן $(\alpha - a)(\alpha + a) = b^2 \geq 0$. אז $\alpha - a \geq 0$ או $\alpha + a \geq 0$.
לפי ההערה גם השני אינו שלילי.