השלמות על תמורות (מהרצאה 3)

<u>תזכורת</u>: חבורת התמורות על $X=\{1,2,...,n\}$ נקראת התמורה הסימטרית S_n.

<u>הגדרה</u>: מחזור (חישוקון, $cyclus$) מאורך k זו תמורה המסומנת $\pi=(a_1a_2....a_k)$, כאשר $a_1,a_2,...,a_k\in X$, ומקיימת $\pi(a_1)=a_2,\ \pi(a_2)=a_3,....,\ \pi(a_k)=a_1$, ולכל $a_1,a_2,...,a_k\neq a\in X$ מתקיים $\pi(a)=a$.

<u>הגדרה</u>: חילוף (היפוך, חישוקון, $transposition$) הוא מחזור מאורך 2. למשל $(1,4)$ זהו חילוף ב-S_5.

<u>למה</u>: כל $\sigma\in S_n$ ניתן להצגה כמכפלה $\sigma=\pi_1\pi_2....\pi_r$ של מחזורים זרים מאורך גדול מ-1. הצגה זו יחידה עד כדי סדר המחזורים.

<u>הוכחה</u>:

<u>קיום</u>: $\langle\sigma\rangle$ פועלת על $X=\{1,...,n\}$. יהיו $X_1,...,X_r$ המסלולים מאורך גדול מ-1 של $\langle\sigma\rangle$ ונסמן X_i מאורך k_i. נבחר $x_i\in X_i$, ולכן מתקיים $X_i=\{x_i,\sigma(x_i),\sigma^2(x_i),...,\sigma^{k_i-1}(x_i)\}$, $\sigma^k(x_i)=x_i$. יהי $\pi_i=(x_i\ \sigma(x_i)\ \sigma^2(x_i)\ ...\ \sigma^{k_i-1}(x_i))$. נראה $\sigma=\pi_1\pi_2....\pi_r$. יהי איבר $x\in X$.

אם $x\in X_i$ עבור i כלשהו, אזי $x=\sigma^k(x_i)$ עבור k כלשהו, ואז:

$$\pi_1\pi_2....\pi_r(x)=\pi_i(x)=\pi_i(\sigma^k(x_i))=\sigma^{k+1}(x_i)=\sigma(\sigma^k(x_i))=\sigma(x)$$

אם $x\notin X_i$ לכל i, אזי x הוא איבר במסלול באורך 1, ולכן זר ל-$\pi_1\pi_2....\pi_r$, כלומר

$$\sigma(x)=x,\pi_1\pi_2....\pi_r(x)=x$$

ולכן מתקיים שיוויון.

<u>יחידות</u>: נניח כי $\sigma=p_1p_2...p_m$ כאשר $p_i=(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_{m_i}})$ מחזור מאורך $m_i>1$ ו-$p_1,...,p_m$ זרים. אז:

$$\begin{gathered}\sigma(a_{i_1})=p_1p_2...p_m(a_{i_1})=p_i(a_{i_1})=a_{i_2}\\ \sigma^2(a_{i_1})=\sigma(p_1p_2...p_m(a_{i_1})=\sigma(a_{i_2})=p_1p_2...p_m(a_{i_2})=p_i(a_{i_2})=a_{i_3}\\ \vdots\\ \sigma(a_{i_{m_i-1}})=a_{i_{m_i}}\\ \sigma(a_{i_{m_i}})=a_{i_1}\end{gathered}$$

לכן $X_i'=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_{m_i}}\}=\{\sigma^j(a_{i_1})\mid j\geq 0\}$ הוא מסלול של $\langle\sigma\rangle$ מאורך m_i. המסלולים $X_1',X_2',...,X_m'$ זרים (כי $p_1,...,p_m$ זרים), והם כל מסלולי $\langle\sigma\rangle$ מאורך גדול מ-1: אם

$x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} X_i'$ אז $p_i(x) = x$ לכל i, לכן $\sigma(x) = x$, לכן $\{x\}$ מסלול מאורך 1 של $\langle \sigma \rangle$. לכן $m = r$ ובה"כ $X_i' = X_i$. ▨

<u>טענה</u>: כל תמורה ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים (לאו דווקא יחידה).

<u>הוכחה</u>: לאור הלמה, מספיק להראות עבור מחזורים. ואכן:

$$\pi = (a_1 a_2 ... a_n) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdot ... \cdot (a_1 a_n) \quad ▨$$

<u>הגדרה</u>: אם $\sigma \in S_n$, σ היא מכפלה של k חילופים, אזי נסמן $\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^k$ זוגיות מספר החילופים של σ.

<u>משפט</u>: אם $\sigma = p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_m = \pi_1 \pi_2 \cdot ... \cdot \pi_l$ כאשר p_i, π_i חילופים, אזי $l \equiv m \pmod 2$ (כלומר, זוגיות התמורה מוגדרת היטב).

<u>הוכחה</u>: $\sigma\sigma^{-1} = p_1 p_2 ... p_m \cdot \pi_l \pi_{l-1} ... \pi_2 \pi_1 = (e)$, לכן מספיק להראות שפרמוטציית הזהות בעלת זוגיות חיובית, שכן אז $m + l \equiv 0 \pmod 2$, ולכן $l \equiv m \pmod 2$.
נניח $(e) = (a_1 b_1)(a_2 b_2)...(a_k b_k)$, כאשר $a_i \neq b_i$ לכל i, $k \geq 1$. נראה ש- k זוגי באינדוקציה.
אם $k = 1$ אז המכפלה בצד שמאל אינה הזהות. $k = 2$ ייתכן. נניח $k \geq 3$, ונניח נכונות לכל $i < k$. עבור $i = 2, 3, ..., k$, אחד מהחילופים צריך להזיז את a_1, אחרת המכפלה בצד שמאל לא הייתה פרמוטציית הזהות. לכן, בה"כ, קיים i עבורו $a_i = a_1$ (נבחר את ה $i -$ המינימלי). בעזרת הנוסחאות:

$$(cd)(ab) = (ab)(cd),\ (bc)(ab) = (ac)(bc)$$

ניתן להניח ש- $a_2 = a_1$, שכן אם במכפלת שתי תמורות הגורם השני מזיז את a והראשון לא, ניתן להחליפם במכפלה שקולה בה הגורם הראשון מזיז את a והשני לא (ואז מזיזים את a_i עד a_2).
אם $b_1 = b_2$, אזי $(e) = (a_1 b_1)(a_2 b_2)$, לכן ניתן להורידם מן המכפלה, ונשאר עם $k - 2$ חילופים, ומהנחת האינדוקציה k זוגי. אחרת, אם $b_1 \neq b_2$, אזי $(a_1 b_1)(a_1 b_2) = (a_1 b_2)(b_1 b_2)$, ואז $(e) = (a_1 b_2)(b_1 b_2)(a_3 b_3)...(a_k b_k)$. נחפש שוב i מינימלי עבורו $a_i = a_1$ (קיים כזה, אחרת זו לא הייתה תמורת הזהות). נחזור על התהליך, ואז או שנוכל לרשום את המכפלה כמכפלה של $k - 2$ חילופים, או שנוריד את מספר החילופים המזיזים את a_1 ב-1. אולם, מספר החילופים שמזיזים את a_1 הוא לכל הפחות 2, לכן התהליך סופי ונוכל לרשום את המכפלה כמכפלת $k - 2$ חילופים. ▨

<u>טענה</u>: $\operatorname{sgn}: S_n \to \{-1, 1\}$ הוא הומומורופיזם.

<u>הוכחה</u>: אם δ_1 מכפלה של n חילופים ו- δ_2 מכפלה של m חילופים, אזי $\delta_1 \delta_2$ מכפלה של $m + n$ חילופים, כלומר $\operatorname{sgn}(\delta_1 \delta_2) = (-1)^{m+n} = (-1)^n \cdot (-1)^m = \operatorname{sgn}(\delta_1) \cdot \operatorname{sgn}(\delta_2)$. ▨

<u>מסקנה</u>: אוסף התמורות הזוגיות (=בעלות סימן 1) הוא תת חבורה נורמלית ב- S_n, שנסמנה A_n (*Alternating*).

הוכחה:

$$\ker(\mathrm{sgn})=\{\sigma\in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma)=1\}=A_n$$

ולכן $A_n \lhd S_n$. ▨

טענה: חצי מן התמורות ב- S_n זוגיות.

הוכחה: ניקח חילוף כלשהו τ ב- S_n. נסמן ב- B את אוסף התמורות האי-זוגיות. נגדיר העתקה $f:A_n\to B$ ע"י $f(\sigma)=\tau\sigma$. זו ההעתקה הפיכה, כי $f^{-1}(\sigma)=\tau^{-1}\sigma$, ולכן $|A_n|=|B|$. ▨

מסקנה: $[S_n:A_n]=2$.

תרגיל: $S_n/A_n\cong\{\pm1\}$.

הוכחה: ההעתקה $\mathrm{sgn}:S_n\to\{\pm1\}$ היא הומומורפיזם ועל. מתקיים $\ker(\mathrm{sgn})=A_n$. לכן, לפי משפט ההומומורפיזם, מתקיים $S_n/A_n\cong\{\pm1\}$.